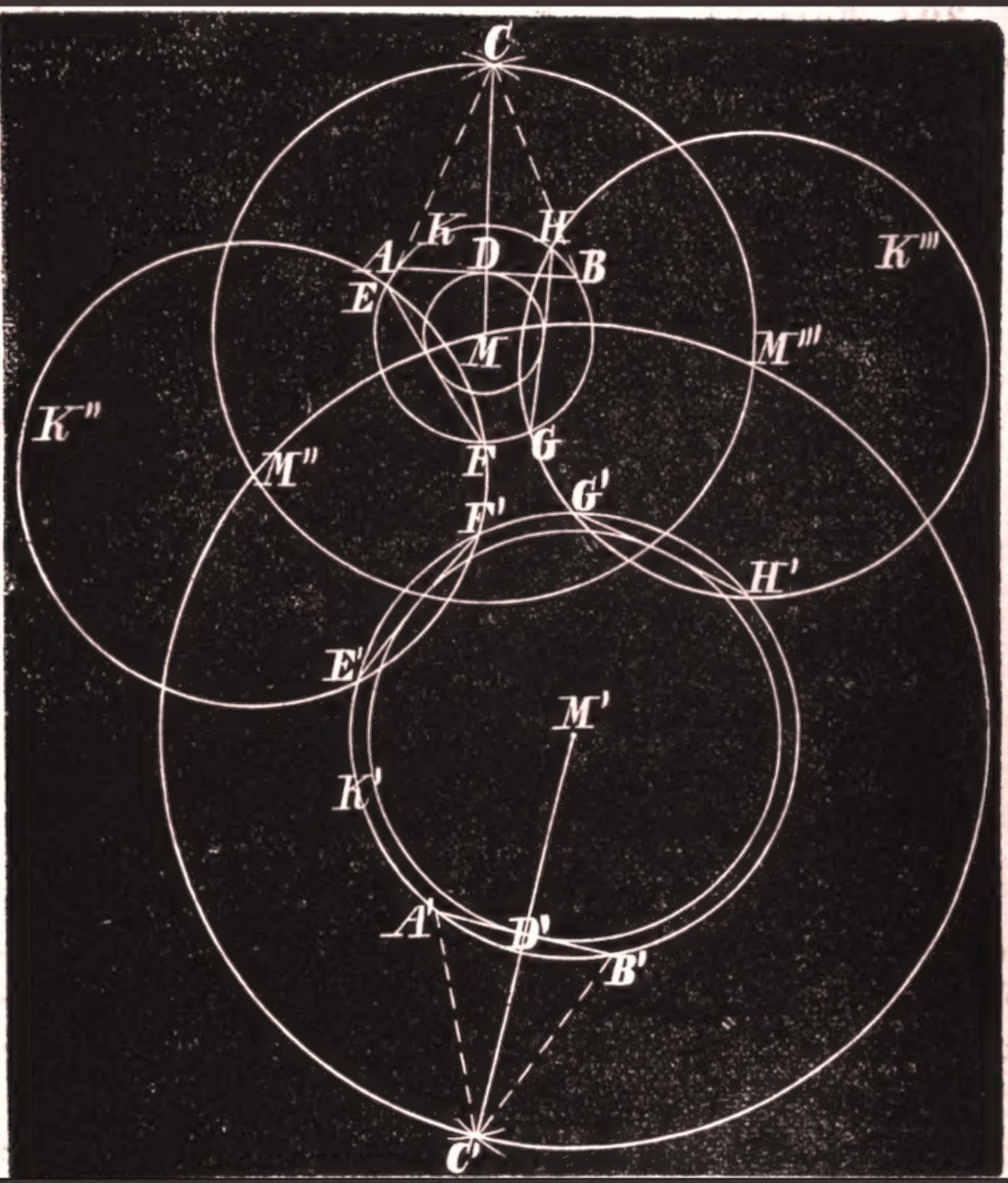


Geometrische analysis und synthesis

Wilhelm Adam

Digitized by Google

B169
.119
.113
8156
Yearsley

Elizabeth Foundation,

LIBRARY
OF THE
College of New Jersey.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Geometrische

Analysis und Synthesis.

Eine

Sammlung von 636 planimetrischen Constructions-Aufgaben mit rein-geometrischer Lösung.

Für höhere Lehranstalten,

so wie

zum Gebrauch beim Selbstunterricht

systematisch geordnet und bearbeitet

von

W. Adam,
ordentl. Lehrer an dem Königl. Lehrer-Seminar zu Kyritz
in der Provinz Brandenburg.

Potsdam, 1872.

Verlag von A. Stein.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Wenngleich Constructionsaufgaben für das System selbst von untergeordneter Bedeutung sind, so läßt sich doch auch nicht in Abrede stellen, daß durch die rein-geometrische Lösung derartiger Aufgaben der Mathematikbeflissene wesentlich gefördert wird; denn das Gebiet der Aufgaben ist die Arena, wo das Studium des Systems, zur Spontaneität im eminentesten Sinne des Worts erhebend, den Geist nöthigt, Gesuchtes auf Gegebenes zu beziehen und die dargebotenen Hülfsmittel der Wissenschaft mit prüfendem Blicke zu überschauen, um sodann Zweckdienliches auszuwählen und zu benutzen. Die Wichtigkeit und Bedeutsamkeit solcher Nöthigung ist in neuerer Zeit, und zwar vorzugsweise in Deutschland, immer mehr erkannt worden, wie die besten geometrischen Lehrbücher und Leitfäden der Gegenwart darthun, in denen durch eine Reihe von Aufgaben auf die praktische Anwendung und Verwerthung der bereits zur Behandlung gekommenen Lehrsätze mit großer Sorgfalt Bedacht genommen ist. In dieser Hinsicht haben namentlich Vorzügliches geleistet:

1. Dr. J. D. Gandtner (Provinzial-Schulrath in Berlin) und Dr. K. F. Junghans, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie. Für den Schulgebrauch sachlich und methodisch geordnet und mit Hülfsmitteln zur Bearbeitung versehen. 2 Theile. 3. Auflage. Berlin, 1871. Weidmann'sche Buchhandlung.

RECAP 8169 .114
33005
Digitized by Google

2. Dr. Spieker, Lehrbuch der Geometrie mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 5te Auflage. 1871. Potsdam, bei A. Stein.

3. Dr. Reidt, Planimetrie. Berlin, Grote'sche Verlagsbuchhandlung.

4. Koppe (Professor am Gymnasium zu Soest), Planimetrie für den Schul- und Selbstunterricht. Essen, bei Bädeker.

5. Baron Haller v. Hallerstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Für die Portepeefähnrichs-Prüfung in der Königlich Preußischen Armee und Eintritts-Prüfung in der Königlich Preußischen Marine. Zweiter Theil: Geometrie. 7te Auflage. Berlin, 1870. Verlag von Albert Nauck & Comp.

Nach dem verdienstvollen Vorgange dieser und anderer Celebritäten bin ich, als Mathematicus an dem hiesigen Seminar, auch in meinem bescheidenen Wirkungskreise consequent bemüht gewesen, die Theorie durch planmäßige praktische Anwendungen zu beleben und gewissermaßen zu verkörpern. Die in Folge dieses Bestrebens entstandene Sammlung von Aufgaben ist im Laufe der Jahre durch mich erweitert und schließlich unter strenger Berücksichtigung des Systems derartig geordnet und abgerundet worden, daß ich nunmehr bescheidentlich hoffe, durch gegenwärtige Arbeit, bei der ich keine Mühe gescheut habe, einerseits Lehrern der Mathematik ein bequemes Hülfsmittel zur häuslichen Beschäftigung der Schüler, andererseits aber solchen Mathematikbeflissenen, die auf den Selbstunterricht angewiesen sind, einen sichern und zuverlässigen Führer und Lehrmeister an die Hand zu geben.

Was die Anlage dieses Buches betrifft, so darf auf Nachstehendes hingewiesen werden:

1. Die Einleitung handelt von dem Wesen und den Hülfsmitteln der analytischen Lösungsmethode und schließt mit einigen vollständig durchgeführten Beispielen ab.

Digitized by Google

2. Die 636 Aufgaben, welche vorliegendes Buch enthält, sind nach dem System geordnet, und zwar derartig, daß zuerst die Congruenz der geradlinigen Figuren, sodann der Kreis mit den in und um denselben beschriebenen Figuren, ferner die Proportionalität und Ähnlichkeit, und schließlich die Inhaltsgleichheit Berücksichtigung findet.

3. Jeder der so eben genannten Abschnitte zerfällt nach Maßgabe der verschiedenen Kategorien der Figuren in Paragraphen, wodurch die Übersicht bedeutend erleichtert wird.

4. Das Gebiet der Vier- und Vielecke hat, wie die zahlreichen Aufgaben desselben bekunden, eine tiefer in die Sache eindringende Behandlung erfahren.

5. Die Aufgaben über die Verwandlung und Theilung der Figuren sind, weil ein Theil derselben sich auf die Lehre von der Proportionalität und Ähnlichkeit stützt, den abschließenden Paragraphen des Buches überwiesen worden.

6. Bei Bezeichnung der Figuren hat der Verfasser möglichste Consequenz angestrebt und Gangbares gewissenhaft beibehalten.

7. Um möglichst viel Übungsstoff auf verhältnißmäßig geringem Raume darbieten zu können, mußte bei Bearbeitung der Lösungen in vielen Fällen die Beschränkung eintreten, daß nur die Construction der Aufgabe angedeutet wurde, nicht aber auch die Analysis, der Beweis und die Determination, welche Theile der Lösung bei schwierigeren Problemen eingehende Beachtung gefunden haben.

8. Die Lösungen selbst sind möglichst einfach gehalten und daher wohl für den Zweck des Selbstunterrichts geeignet.

9. Ein dem Buche hinzugefügter Anhang stellt die wichtigsten geometrischen Örter, Data und Hülfsconstructionen, welche bei Lösung der Aufgaben zur Anwendung kommen, in planmäßiger Folge übersichtlich zusammen und bietet zugleich in den

Digitized by Google

beigegebenen Beispielen eine Reihe zum Theil ungelöster Aufgaben für die Übung der geistigen Selbstthätigkeit dar.

So möge denn diese Handreichung, die ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, wohlwollende Aufnahme finden und zur Pflege des mathematischen Sinnes recht wirksam beitragen.

Kyritz, den 10. November 1871.

W. Adam.

Digitized by Google

Einleitung.

I. Von der geometrischen Aufgabe.

1. Aufgabe nennt man die Forderung, etwas darzustellen oder herzustellen, das gegebenen Bedingungen entspricht. Bei geometrischen Aufgaben handelt es sich um die Darstellung von Punkten, Linien, Winkeln und Figuren, zu deren Auffindung andere Raumgrößen gegeben sind. Die gegebenen Stücke werden die Bestimmungsstücke der Aufgabe genannt. Die Benutzung der Bestimmungsstücke zur Lösung der Aufgabe ist eine ordnungsmäßige. Die Vorstellung von diesem geistigen Vorgange heißt Construction. Die strenge Wissenschaft betrachtet nämlich eine Figur bereits als construirt (*), wenn alle erforderlichen Punkte derselben planmäßig gefunden worden sind. Jedoch dient die Zeichnung zur Veranschaulichung des gedachten Verfahrens, und zwar desto mehr, je genauer gezeichnet worden ist.

2. Die Lösung einer Constructionsaufgabe ist eine rein-geometrische, wenn man, um sie zu finden, nur die Lehrsätze der Geometrie heranzieht und höchstens noch Proportionen (die ja in der Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren auftreten) anwendet. Das algebraische Verfahren bleibt hierbei gänzlich ausgeschlossen.

Das rein-geometrische Verfahren, welches nur das Lineal und den Zirkel als Hülfsmittel gestattet, stützt sich auf zwei Grundforderungen, die unter dem Namen „Postulate (**) der

*) construiren (latein. construere = zusammenfügen, errichten, bereiten, erbauen) h. aus einzelnen zusammengehörigen Theilen ein Ganzes herstellen oder darstellen.

**) Postulate (latein. postulatum = die Forderung) sind geometrische Aufgaben, welche der Auflösung aller andern Aufgaben der Geometrie zu Grunde liegen und — weil ihre Lösung sich unmittelbar aus dem Begriff der Sache ergiebt — ohne Weiteres »gefordert« werden können.

Digitized by Google

Planimetrie“ bekannt sind, nämlich auf die Construction der geraden Linie und des Kreises.

3. Die einfachsten geometrischen Aufgaben, welche allen zusammengesetzteren Constructionen zu Grunde liegen, heißen Fundamental-Aufgaben. Jede Aufgabe dieser Art führt auf einen einzigen Lehrsatz der Geometrie zurück. Daher finden die Fundamental-Aufgaben ihre Stelle bereits im System, und zwar hinter denjenigen Lehrsätzen, durch welche ihr Beweis geführt wird.

Zusammengesetzte Constructionsaufgaben, deren Lösung auf der gleichzeitigen Anwendung mehrerer Lehrsätze beruht, heißen vorzugsweise Probleme. (*)

4. Die geometrischen Aufgaben zerfallen in bestimmte und unbestimmte. Bestimmt heißt eine Aufgabe, wenn die Lösung derselben zu einem einzigen oder zu mehreren congruenten Resultaten führt. Bestimmte Aufgaben sind z. B. a) Construction eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem der Umfang und ein spitzer Winkel gegeben ist; b) Construction eines Rechtecks aus dem Umfange und der Diagonale. Jede dieser beiden Aufgaben läßt nur ein Resultat zu, wenngleich die verlangte Figur in jedem einzelnen Falle zwei verschiedene Lagen haben kann.

Unbestimmt wird eine Aufgabe genannt, wenn die Bestimmungsstücke derselben verschiedene Resultate zulassen; z. B. die Aufgabe: Aus vier gegebenen Seiten ein Viereck zu construiren.

5. Die unbestimmten Aufgaben theilt man in beschränkt und unbeschränkt unbestimmte. Eine beschränkt unbestimmte Aufgabe führt nur zu einer bestimmten Anzahl von Resultaten. So kann man z. B. aus zwei gegebenen Seiten und demjenigen Winkel, welcher der kleineren dieser Seiten gegenüberliegt, falls die Aufgabe überhaupt möglich ist, nur zwei verschiedene Dreiecke, jedoch in einem besonderen Falle ein einziges Dreieck, und zwar ein rechtwinkliges, construiren.

Unbeschränkt unbestimmt heißt eine Aufgabe, wenn sie unzählig viele Resultate zuläßt. So z. B. die Aufgabe: Ein Parallelogramm zu construiren, von welchem ein Winkel und die Summe der beiden ihn einschließenden Seiten gegeben ist.

---

*) Problem (griech. problema = das Vorgelegte, die Aufgabe) bezeichnet überhaupt eine geometrische Aufgabe.

Digitized by Google

6. Eine Aufgabe heißt eine unmögliche, wenn sie zu keinem Resultate führen kann. Dies ist stets der Fall, wenn die Bestimmungsstücke der Aufgabe den Eigenschaften des Verlangten widersprechen, oder wenn sie — wie z. B. in denjenigen Aufgaben, zu deren Construction zu viele Bestimmungsstücke gegeben sind — sich gegenseitig ausschließen. Als unbedingt unmöglich stellen sich folgende Aufgaben dar: a) In einen Kreis zwei Sehnen einzutragen, die einander gegenseitig halbiren. b) Von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Secante nach letzterem zu ziehen, so daß die Tangente gleich dem äußeren Abschnitte der Secante werde.

In vielen Fällen unmöglich ist die Aufgabe: In der Peripherie eines gegebenen Kreises einen Punkt zu finden, der von zwei außerhalb der Kreisfigur gegebenen Punkten gleiche Entfernung habe.

7. Die Zahl der zur Bestimmung einer Aufgabe erforderlichen Stücke hängt von den besonderen Eigenschaften der verlangten Figur ab. Namentlich kommt es hierbei auch darauf an, ob die gesuchte Construction an beliebiger oder an einer durch gewisse Bestimmungen genau bezeichneten Stelle der Ebene (Constructions-Ebene) ausgeführt werden soll. Im ersten Falle sind allein die Bestimmungen der Congruenz maßgebend; im zweiten Falle hingegen müssen noch weitere Bestimmungsstücke hinzutreten.

Darf die Construction an beliebiger Stelle der Ebene geschehen, so ist bestimmt

a) ein reguläres Polygon (incl. das gleichseitige Dreieck und das Quadrat), der Kreis, das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck durch	1	Stück;
b) das rechtwinklige Dreieck, das gleichschenklige Dreieck, das Rechteck, der Rhombus durch . .	2	Stücke;
c) das Dreieck, das Parallelogramm, das gleichschenklige Trapez, das Deltoid durch. . . .	3	„
d) das Trapez durch	4	„
e) das Trapezoid durch.	5	„
f) das n-Eck durch.	2n — 3	„

Das n-Eck läßt sich nämlich durch die Diagonalen aus einer Ecke in n — 2 Dreiecke zerlegen, von denen das erste durch 3,

Digitized by Google

jedes der übrigen aber durch 2 neue Stücke bestimmt wird. Daher ist die Summe der Bestimmungsstücke des n-Ecks $= 2(n-2) + 1 = 2n - 4 + 1 = 2n - 3$.

Soll die Construction an einer gegebenen Stelle der Ebene ausgeführt werden, so ist z. B. ein Punkt durch 2, ein Kreis durch 3 Stücke bestimmt.

II. Von der analytischen Methode.

1. Zur Lösung geometrischer Aufgaben, welche nicht unmittelbar auf einen einzelnen Satz zurückführen, bedient man sich mit Vortheil der analytischen Methode, bei welcher viererlei zu unterscheiden ist, nämlich:

a) die Analysis oder Analyse, d. i. Auflösung, Zergliederung,
b) die Construction oder Synthesis (auch Synthese), d. i. Zusammenstellung,
c) der Beweis für die Richtigkeit der Construction,
d) die Determination (Abgränzung, Festsetzung) d. i. Untersuchung der Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe.

Anmerkung. Das griech. Wort analysis bezeichnet die Aufhebung einer Schwierigkeit, das Auflösen in einfache Begriffe, überhaupt die Auflösung eines zusammengesetzten Ganzen in seine Bestandtheile; daher analytisch = durch Auflösung zergliedernd.

Das griech. Wort synthesis bezeichnet eine Zusammenfügung, Zusammenstellung, Zusammensetzung.

Das latein. determinare bedeutet: abgränzen, festsetzen; daher Determination die Angabe des Verhältnisses, in welchem die Bestimmungsstücke zu einander stehen müssen, wenn die verlangte Construction möglich sein soll.

2. Die Analysis, deren Hülfsmittel nachstehende sind:

a) Lehrsätze, deren Wahrheit bereits früher bewiesen worden,
b) geometrische Örter, deren je zwei zur Bestimmung eines Punktes vorhanden sein müssen,
c) die Reduction auf leichter lösbare Aufgaben, und zwar mit Hülfe
   aa) der Data (des stillschweigend Mitgegebenen), d. i. derjenigen Stücke, die sich aus den vorhandenen Bestim-

Digitized by Google

mungsſtücken einer Figur unmittelbar von ſelbſt ergeben,

bb) der Zerlegung oder Erweiterung der verlangten Figur,

verfährt im Allgemeinen folgendermaßen:

a) Man nimmt die geſuchte Figur als bereits gefunden an und verſinnlicht ſie mit möglichſter Wahrſcheinlichkeit auf dem Papier, worauf die gegebenen und die geſuchten Stücke der Aufgabe zweckmäßig bezeichnet werden.

b) Wenn in der vorläufig entworfenen Figur etwa einige der gegebenen Stücke noch nicht erſcheinen, ſo ſind dieſelben an gehöriger Stelle wirklich einzutragen und die zu dieſem Zwecke erforderlichen Hülfslinien zu conſtruiren. Hierdurch wird die Figur zerlegt, oft aber auch erweitert.

c) Überhaupt hat man Endpunkte oder ſonſtige einzelne Punkte von Linien durch Hülfslinien zu verbinden, damit Figuren, insbeſondere Dreiecke, entſtehen, auf welche die bereits bekannten und bewieſenen Lehrſätze angewendet werden können.

d) Bei der ſo eben erwähnten Zergliederung ſind namentlich diejenigen Eigenſchaften der Figur aufzuſuchen, welche ſich auf die gegebenen Stücke und auf die verlangten Eigenſchaften beziehen.

e) Mittels dieſer Eigenſchaften verſchaffe man ſich für jeden Punkt der geſuchten Figur zwei Linien, gerade oder Kreislinien, in welchen — den gegebenen Bedingungen gemäß — dieſer Punkt liegen muß, und welche aus den Beſtimmungsſtücken conſtruirt werden können. Jede dieſer Linien wird der geometriſche Ort des betreffenden Punktes genannt, und ihr Durchſchnittspunkt iſt der geſuchte Punkt der zu conſtruirenden Figur.

f) Sind auf dieſem Wege alle Punkte der Figur gefunden, ſo kann dieſelbe als conſtruirt angeſehen werden.

Zuſatz. Die Hülfsmittel der Analyſis treten nicht immer einzeln auf, ſondern müſſen in vielen Fällen, damit ſich die Conſtruction wirklich ergebe, gleichzeitig angewendet werden. Zuweilen laſſen ſich mehrere Wege für die Conſtruction finden,

Digitized by Google

und ist dies gewöhnlich dann der Fall, wenn man unter den Hülfsmitteln der Analysis beliebig wählen kann.

Anmerkung. Wenn mehrere Stücke einer Figur derartig von einander abhängen, daß das eine aus den andern gegebenen abgeleitet werden kann, so nennt man das erstere ein Datum (Gegebenes) der letzteren. So ist z. B. im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse ein Datum zu den beiderseits gegebenen Katheten, im Dreieck der dritte Winkel ein Datum zu den beiden andern Winkeln, wenn diese bekannt sind.

3. Die Construction oder Synthesis ist im Wesentlichen die Umkehrung der Analysis, indem sie den Schlußfolgerungen derselben rückwärts nachgeht und so die gesuchte Figur aus den Bestimmungsstücken zusammenstellt. Während also die Analysis das Gegebene aus dem Gesuchten herleitet, geht die Construction vom Bekannten zum Unbekannten über. Hat die Analysis richtige Schlußfolgerungen gemacht, so muß sich auch eine richtige Construction ergeben.

4. Der Beweis zeigt, daß die ausgeführte Construction den Bedingungen der Aufgabe wirklich entspricht. Seine Behauptung (Thesis) ist die Voraussetzung (Hypothesis) der Analysis. Mithin ist der Beweis die Umkehrung der Analysis, welche letztere durch ihn nachträglich controlirt wird. Bei leichteren Aufgaben kann auf den Beweis verzichtet werden, weil derselbe sich alsdann aus der Analysis leicht ergiebt. Weniger entbehrlich aber ist er bei zusammengesetzten Constructionen, denn durch ihn allein wird die Richtigkeit derselben außer allen Zweifel gesetzt.

5. Die Determination untersucht die Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe, d. h. sie bestimmt:

a) in welchem Verhältniß die Bestimmungsstücke zu einander stehen müssen, damit die verlangte Construction ausführbar sei, oder unter welchen besondern Bedingungen der Lage oder Größe der gegebenen Stücke die Aufgabe unmöglich werde;

b) ob die Aufgabe im Allgemeinen oder unter gewissen Bedingungen eine oder mehrere Lösungen zuläßt.

Die Hülfsmittel der Determination sind:

a) Anwendung der geometrischen Lehrsätze,

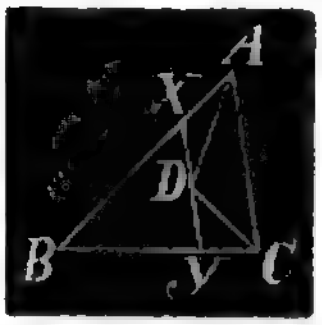
b) Algebraische und trigonometrische Untersuchungen.

Digitized by Google

III. Aufgaben mit vollständiger Lösung.

1. Aufgabe.

In einem gegebenen Dreieck ABC zu einer Seite AC eine Parallele XY zu ziehen, daß letztere gleich der Summe der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist (nämlich $XY = AX + CY$).



Analysis. Ist XY die gesuchte Parallele, so kann $XD = XA$ auf ihr abgetragen werden, und muß alsdann $DY = YC$ sein. Durch Verbindung des Punktes D, in welchem die beiden Strecken XD und YD zusammenstoßen, mit den Punkten A und C des gegebenen Dreiecks entstehen daher zwei gleichschenklige Dreiecke XAD und YCD. Mit Hülfe derselben findet sich:

$\angle XAD = \angle XDA$ (als Basiswinkel)
und $\angle XDA = \angle DAC$ (als Wechselwinkel),
mithin $\angle XAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle XAC = \frac{1}{2} \angle BAC$,
d. h. $\angle BAC$ wird durch die Linie AD halbirt;
ferner $\angle YDC = \angle YCD$ (als Basiswinkel)
und $\angle YDC = \angle DCA$ (als Wechselwinkel),
daher $\angle YCD = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle YCA = \frac{1}{2} \angle BCA$,
d. h. $\angle BCA$ wird durch die Linie CD halbirt.

Die (unbegränzt gedachten) Linien AD und CD sind die geometrischen Örter für den Punkt D, durch den die Parallele XY gelegt werden muß. Mithin liegt der Punkt D im Durchschnitt der Linien AD und CD. Hiermit ist die gesuchte Construction gefunden.

Construction. Man halbire die Winkel BAC und ACB, verlängere die Halbirungslinien AD und CD bis zum Schnittpunkt D, und lege durch D die Linie XY parallel zu AC, so ist $XY = AX + CY$.

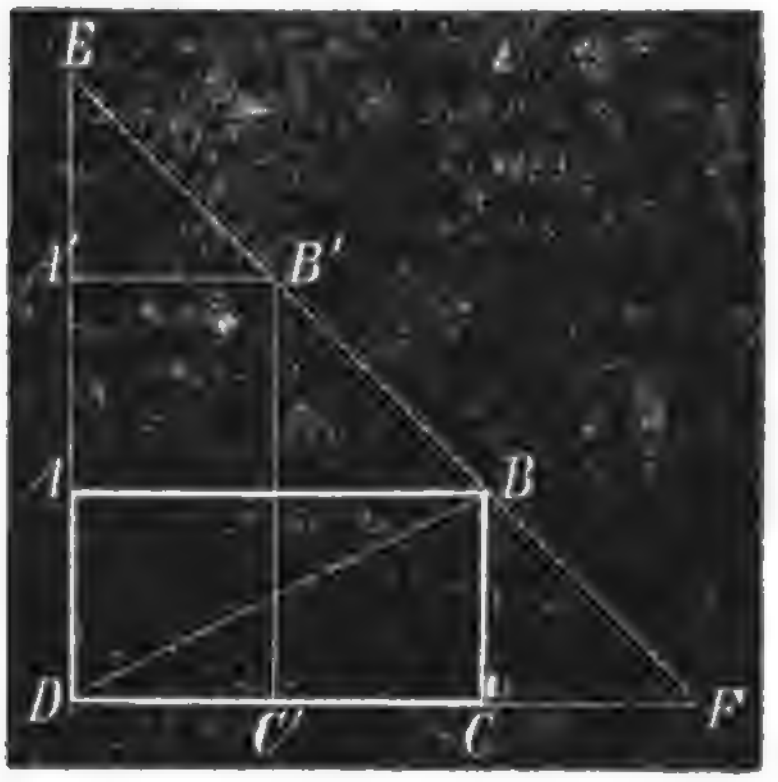
Beweis. Es ist $\angle XAD = \angle CAD$ (per constr.)
und $\angle CAD = \angle XDA$ (als Wechselwinkel);
daher $\angle XAD = \angle XDA$,
also ΔXAD gleichschenklig, nämlich $XA = XD$.
Ferner ist $\angle YCD = \angle ACD$ (per constr.)
und $\angle ACD = \angle CDY$ (als Wechselwinkel),
daher $\angle YCD = \angle CDY$,
also ΔYCD gleichschenklig, nämlich $YC = YD$.
Demgemäß ist $XA + YC = XD + DY = XY$.

Digitized by Google

Determination. Zu jeder Seite des gegebenen Dreiecks kann eine den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Parallele gezogen werden.

2. Aufgabe.

Ein Rechteck ABCD zu construiren, von welchem der Umfang $= 2a$, die Diagonale $BD = d$ gegeben ist.



Analysis. Es sei ABCD das verlangte Rechteck. Wird DA über A und DC über C verlängert, alsdann $AE = AB$ und $CF = BC$ gemacht, so entstehen durch Verbindung des Punktes B mit E und F zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke ABE und BCF, deren Hypotenusen BE und BF, weil die Summe der im Punkte B zusammentreffenden Winkel $ABE + ABC + CBF = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2\,R$ ist, zusammen eine einzige gerade Linie EF bilden. Demgemäß ist auch DEF ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Wird die Hypotenuse EF dieses Dreiecks mit $DB = d$ aus dem Eckpunkte D geschnitten, so ergiebt sich der Punkt B, von wo aus (mittels der Perpendikel BA und BC) auch die Eckpunkte A und C leicht gefunden werden können.

Construction. Man construire ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck EDF, dessen Kathete $DE = DF = a$ (d. i. gleich dem halben Umfang des Rechtecks) ist, schneide die Hypotenuse EF dieses Dreiecks aus dem Scheitel D des rechten Winkels mit $DB = d$ (d. i. gleich der gegebenen Diagonale), wodurch sich der Eckpunkt B ergiebt, und fälle aus B Lothe auf die Katheten DE und DF, wodurch die Eckpunkte A und C des verlangten Rechtecks gefunden werden. Alsdann entspricht das Rechteck ABCD den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis. Aus der Construction erhellt, daß ABCD ein Rechteck ist und die Linie $BD = d$ zur Diagonale hat. Es bleibt noch zu beweisen, daß $AB = AE$ und $BC = CF$ ist. Nach der Construction ist aber $AB \parallel DF$, wie auch $BC \parallel CD$, mithin jedes

der beiden Dreiecke EAB und BCF dem Dreieck EDF ähnlich, also rechtwinklig-gleichschenklig. Demgemäß ist $AB = AE$ und $BC = CF$; folglich

$$AB + AD = EA + AD = ED = a$$
$$\text{und } DC + CB = DC + CF = DF = a$$
$$AB + BC + CD + DA = ED + DF = 2a,$$

d. h. das Rechteck ABCD hat auch den vorgeschriebenem Umfang.

Determination. Die Hypotenuse EF des Dreiecks EDF kann von der Diagonale $BD = d$ aus dem Scheitel D des rechten Winkels noch in einem zweiten Punkte B' geschnitten werden, wodurch sich das Rechteck A'B'C'D ergiebt, das sich aber von dem Rechteck ABCD nur durch die Lage unterscheidet.

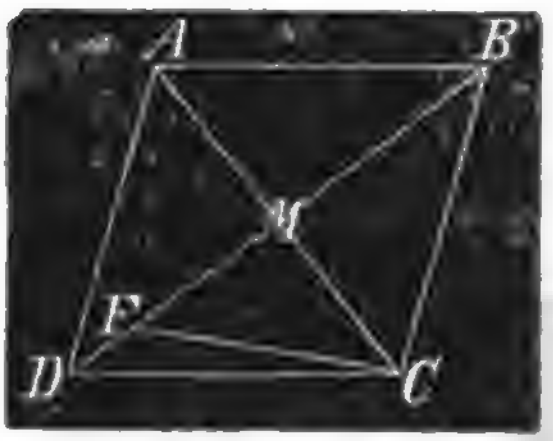
Die Construction kann nicht ausgeführt werden, wenn

$$d \leqq a$$

gegeben ist.

3. Aufgabe.

Einen Rhombus zu construiren, von welchem die Seite $= a$ und die Differenz der beiden Diagonalen $= d$ gegeben ist.



Analysis. Es sei ABCD der gesuchte Rhombus, die Seite $CD = a$ und (weil in jedem Parallelogramm die Diagonalen einander gegenseitig halbiren) $MD - MC = MD - MF = DF = \frac{d}{2}$, d. i. gleich der halben Differenz der beiden Diagonalen. Da die Diagonalen des Rhombus einander rechtwinklig schneiden, so entsteht durch Verbindung der Punkte F und C ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck MFC, in welchem $\angle MFC = \frac{1}{2} R$ ist. Daher ist $\angle DFC = 1\frac{1}{2} R$, und läßt sich nun ΔCDF aus zwei Seiten, $CD = a$ und $DF = \frac{d}{2}$, und dem der größeren Seite CD gegenüberliegenden Winkel $DFC = 1\frac{1}{2} R$ construiren. Ist aber ΔCDF gefunden, so ergiebt sich auch das rechtwinklige Dreieck CDM und durch letzteres der gesuchte Rhombus ABCD.

Construction. Man legt an $DF = \frac{d}{2}$ eine unbegränzte Gerade FC unter einem Winkel $DFC = 1\frac{1}{2} R$; schneidet aus

dem Punkte D mit CD = a die erwähnte Gerade FC in C; verbindet D mit C, fällt aus C auf die Verlängerung von DF ein Loth CM; verlängert DM und CM über M hinaus um ſich ſelbſt, ſo daß MB = MD und MA = MC wird, und verbindet zuletzt A mit B und D, wie auch B mit C: ſo iſt ABCD der geſuchte Rhombus.

Beweis. Der Conſtruction gemäß iſt ∠ FMC = R und ∠ DFC = $1\frac{1}{2}$ R, daher ∠ MFC = $\frac{1}{2}$ R und demzufolge auch ∠ MCF = $\frac{1}{2}$ R. Es iſt alſo Δ MFC gleichſchenklig, nämlich MF = MC; mithin MD — MF = MD — MC = $\frac{1}{2}$ (BD — AC) = DF = $\frac{d}{2}$.

Aus der Conſtruction ergiebt ſich ferner, daß die vier rechtwinkligen Dreiecke MCD, MCB, MAB und MAD congruent, folglich die Seiten CD, CB, BA und AD gleich ſind. Demgemäß iſt das Viereck ABCD ein Rhombus, und entſpricht daſſelbe den Bedingungen der Aufgabe.

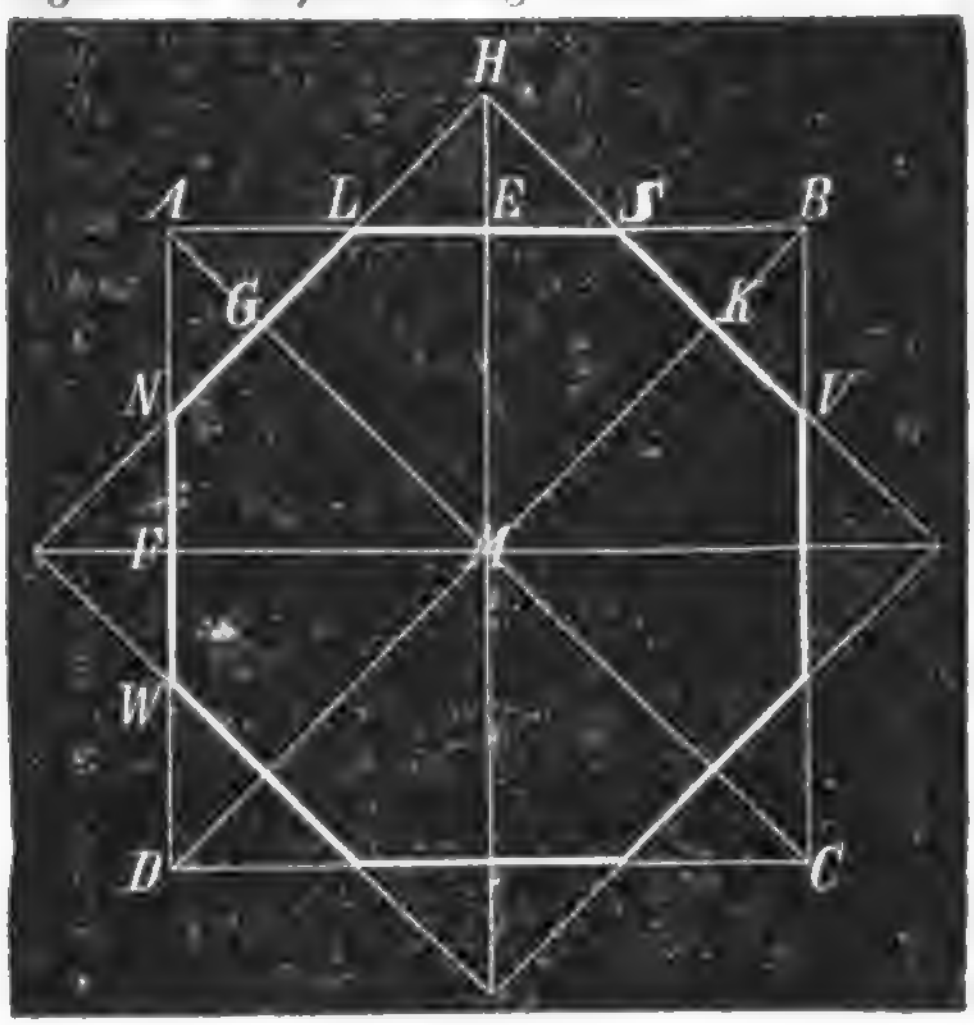
Determination. Die Conſtruction iſt unmöglich, wenn

$$d \geqq 2a$$

gegeben iſt.

4. Aufgabe.

Von einem Quadrat vier Dreiecke abzuſchneiden, daß ein reguläres Achteck übrig bleibt.



Analyſis. Es ſei die nach Abſtumpfung der vier Ecken des gegebenen Quadrats ABCD übriggebliebene Figur ein reguläres Achteck. Daſſelbe läßt ſich durch Verlängerung ſeiner den Ecken des Quadrats ABCD gegenüberliegenden Seiten zu einem Quadrat ergänzen, welches ſich von dem gegebenen

Digitized by Google

Quadrat nur durch die Lage unterscheidet. Beide haben daher auch dieselben Diagonalen, welche in dem gemeinsamen Schnittpunkte M sich gegenseitig halbiren. Es ist also MH = MA und demgemäß Quadrat MGHK ≅ Quadrat AFME, folglich MG = AF = $\frac{1}{2}$ AD; womit die Construction gefunden ist.

Construction. Man halbire eine Seite des Quadrats, z. B. AD in F, ziehe die Diagonalen AC und BD, welche sich in M schneiden, trage auf denselben aus M nach beiden Seiten die halbe Seite des Quadrats AF = $\frac{1}{2}$ AD ab und lege durch den Endpunkt jeder abgetragenen Strecke (z. B. durch G, K ꝛc.) eine Parallele zu den Diagonalen des gegebenen Quadrats: so werden an den Ecken des letzteren vier congruente Dreiecke derartig abgeschnitten, daß ein reguläres Achteck übrig bleibt.

Beweis. Nach der Construction ist MG = AF = AE und — wenn die durch G und K gehenden Seiten des Achtecks bis H verlängert werden — auch MH = MA, mithin Δ MAB ≅ Δ MHG, welche den Winkel AMH gemein haben. Hieraus ergiebt sich zugleich, daß die Achtecksseite LN von der Diagonale AC des Quadrats senkrecht geschnitten wird. Da die Diagonalen des Quadrats die Winkel desselben halbiren, so findet sich hierzu: Δ AGN ≅ Δ AGL und in ähnlicher Weise Δ HEL ≅ Δ HES.

Wird nun von jedem der oben genannten congruenten Dreiecke MAE und MHG das gemeinsame Viereck MGLE subtrahirt, so ergiebt sich Δ AGL = Δ HEL. Diese beiden Dreiecke haben aber auch gleiche Winkel, wie sich leicht darthun läßt, und ist daher

Δ AGL ≅ Δ HEL,

d. i. $\frac{1}{2}$ Δ ANL ≅ $\frac{1}{2}$ Δ HLS,

also Δ ANL ≅ Δ HLS

und demgemäß NL = LS.

Ebenso läßt sich nachweisen, daß LS = SV ꝛc. ist, woraus folgt, daß das entstandene Achteck lauter gleiche Seiten hat.

Wie bereits dargethan worden, ist Δ AGN ≅ Δ AGL, mithin AN = AL, also das abgeschnittene rechtwinklige Dreieck ANL gleichschenklig, und demgemäß ∠ ANL = ∠ ALN = $\frac{1}{2}$ R, so wie (als Nebenwinkel der genannten Winkel) ∠ SLN =

Digitized by Google

$\angle$ LNW $= 1\frac{1}{2}$ R. Wird dieſes Verfahren fortgeſetzt, ſo findet ſich, daß jeder Winkel des entſtandenen Achtecks $= 1\frac{1}{2}$ R iſt.

Demgemäß hat das übriggebliebene Achteck gleiche Seiten und gleiche Winkel.

Determination. Die Aufgabe unterliegt keiner Beſchränkung. Wird die Seite des gegebenen Quadrats mit a, die an jeder Ecke desſelben abzuſchneidende Strecke AL $=$ AN mit x und die Seite des geſuchten Achtecks mit y bezeichnet, ſo findet ſich allgemein:

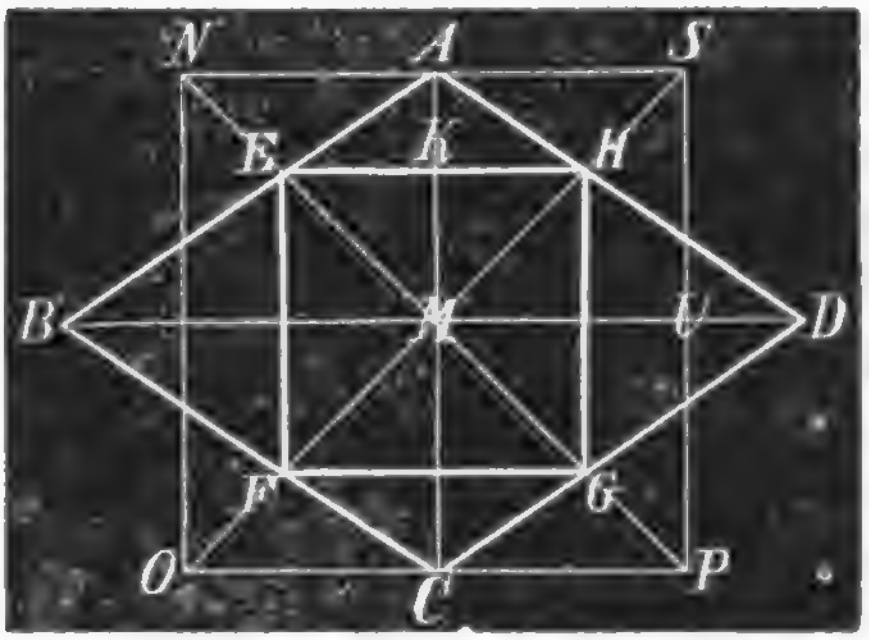
$$x = a - \sqrt{\tfrac{1}{2} a^2} \text{ und } y = \sqrt{2a^2} - a,$$

d. h. die Seite des Achtecks ergiebt ſich, wenn man von der Diagonale des gegebenen Quadrats die Seite desſelben abſchneidet. Daher iſt in obiger Figur in jedem der abgeſchnittenen Dreiecke die Hypotenuſe (NL) das Doppelte der Höhe (AG) auf dieſelbe.

5. Aufgabe.

In einen gegebenen Rhombus ABCD ein Quadrat EFGH zu conſtruiren, daß die Ecken des Quadrats in den Seiten des Rhombus liegen.

Analyſis. Es ſei EFGH das verlangte Quadrat, welches durch die Diagonalen des Rhombus in vier gleiche Quadrate zerlegt wird. Die Diagonalen des gegebenen Rhombus und des geſuchten Quadrats haben einen gemeinſamen Schnittpunkt M, in welchem ſie ſich gegenſeitig halbiren. Da nun die Diagonalen AC und BD des gegebenen Rhombus in M. einander rechtwinklig ſchneiden, ſo entſteht, wenn man aus M auf der größeren dieſer beiden Diagonalen eine Strecke MU $=$ MA (d. i. gleich der Hälfte der kleineren Diagonale AC abſchneidet, in U ein Loth US und in A ein Loth AS errichtet und dieſe beiden Lothe bis zum Schnittpunkt S verlängert, ein Quadrat MASU, welches die Hälfte der kleineren Diagonale AC des Rhombus zur Seite hat. Aus dieſem Quadrat läßt ſich aber das Quadrat



der Diagonale AC, nämlich das Quadrat SNOP leicht herstellen. Die Diagonalen SO und NP des letzteren schneiden die Seiten des Rhombus in den Eckpunkten des gesuchten Quadrats EFGH, womit die Construction gefunden ist.

Construction. Man lege durch jeden Endpunkt der kleineren Diagonale AC des gegebenen Rhombus rechtwinklig zu derselben eine Gerade, schneide auf ihr aus den erwähnten Endpunkten (A und C) nach beiden Seiten eine Strecke $AS = AN = CP = CO = \frac{AC}{2}$ ab, verbinde die gegenüberstehenden Endpunkte dieser Strecken mit einander, nämlich S mit P, so wie N mit O; ziehe in dem hierdurch entstandenen Quadrat NSPO die Diagonalen SO und NP, wodurch sich die Punkte E, F, G und H in den Seiten des Rhombus ergeben; und ziehe schließlich die Linien EF, FG, GH und HE: so schließen dieselben ein Quadrat EFGH ein.

Beweis. Der Construction gemäß ist das Viereck OPSN ein Quadrat, nämlich das Quadrat der kleineren Diagonale AC des gegebenen Rhombus. Um darzuthun, daß auch das Viereck EFGH ein Quadrat ist, muß nachgewiesen werden, daß die Seiten desselben denen des Quadrats OPSN parallel sind; z. B. EH ∥ NS. Es ist aber in den Dreiecken ANE und ASH:

$AN = AS$ (per constr.),

$\angle NAE = \angle SAH$ (als Differenz des Rechten und der Hälfte eines Rhombus-Winkels)

und $\angle ANE = \angle ASH$ (als Hälften eines Rechten);

mithin $\Delta ANE \cong \Delta ASH$,

daher $NE = SH$

und demgemäß $MN : MS = ME : MH$, woraus erhellt: EH ∥ NS. In ähnlicher Weise ergiebt sich, daß auch HG ∥ SP, GF ∥ PO und FE ∥ ON ist. Mithin ist das Viereck EFGH, weil dem Quadrat OPSN ähnlich, selbst ein Quadrat.

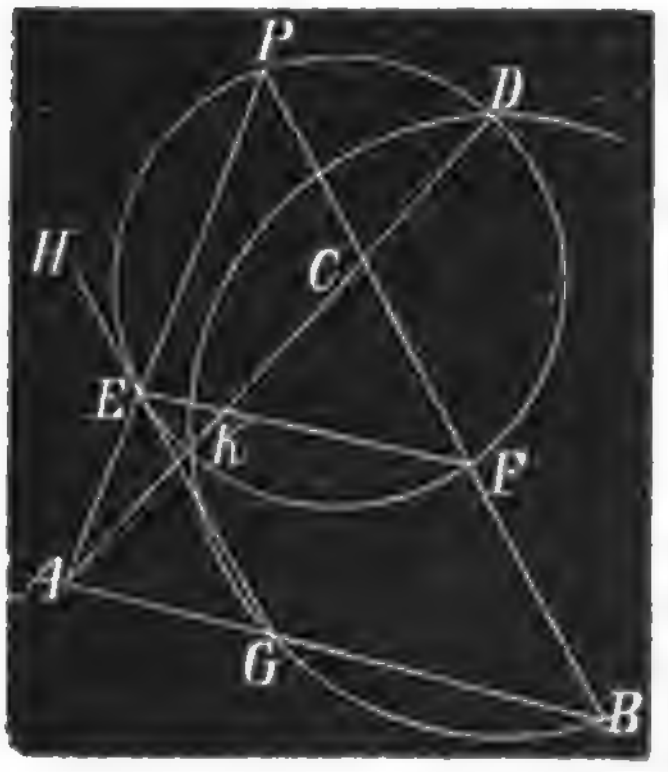
Determination. Die Aufgabe unterliegt keiner Beschränkung.

6. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Kreislinie DEF (Centrum C) und außerhalb derselben eine Linie AB. Man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt P finden, daß — wenn PA und PB,

Digitized by Google

welche die Kreislinie in E und F ſchneiden, gezogen werden — die Linie EF mit AB parallel ſei.



Analyſis. Iſt P der geſuchte Punkt und EF ‖ AB, ſo findet ſich ∠ PFE = ∠ PBA. Legt man nun an den Punkt E der gegebenen Kreislinie eine Tangente GH, ſo iſt

∠ HEP = ∠ PFE und weil

∠ AEG = ∠ HEP,

auch ∠ AEG = ∠ PFE = ∠ PBA;

mithin Δ AEG ∽ Δ APB.

Die den gemeinſamen Winkel A dieſer beiden Dreiecke einſchließenden Seiten ſtehen alſo in Proportion, d. h. es iſt:

AG : AE = AP : AB oder AG.AB = AE.AP (I.).

Wird ferner aus dem Punkte A durch das gegebene Centrum C eine gerade Linie AD gezogen, die den gegebenen Kreis in K ſchneidet, ſo iſt — weil die Secanten AP und AD, welche im Punkte A außerhalb des Kreiſes zuſammentreffen, ſich verhalten umgekehrt wie ihre äußeren Abſchnitte AE und AK:

AP : AD = AK : AE oder AD.AK = AE.AP (II.)

Aus I. und II. ergiebt ſich aber:

AG.AB = AD.AK,

was — dem angegebenen Lehrſatze gemäß — allemal der Fall iſt, wenn die Punkte D, K, G und B in einer Kreislinie liegen. Hiermit iſt die Conſtruction gefunden.

Conſtruction. Man verbinde A mit dem Centrum C; verlängere AC bis zum Punkte D in der Peripherie; lege durch die drei gegebenen Punkte D, K und B eine Kreislinie, welche die Linie AB in einem vierten Punkte G ſchneidet; lege ferner von G aus eine Tangente GH an den gegebenen Kreis, wodurch ſich der Punkt E in der Peripherie desſelben ergiebt; verbinde E mit A und verlängere AE bis zur Peripherie des gegebenen Kreiſes, d. i. bis zum Punkte P; ziehe ſodann PB, welche dieſen Kreis in F ſchneidet, und verbinde zuletzt F mit E durch die gerade Linie EF: ſo iſt EF ‖ AB.

Beweis. Durch Anwendung des Secantenſatzes, das eine

Digitized by Google

Mal auf die Secanten AB und AD des Hülfskreises, das andere Mal auf die Secanten AD und AP des gegebenen Kreises, findet sich:

$$AD.AK = AB.AG$$
$$\text{und } AD.AK = AP.AE;$$
$$\text{mithin } AB.AG = AP.AE.$$

Es sind also die Schenkel des den beiden Dreiecken ABP und AEG gemeinsamen Winkels A proportionirt, woraus folgt:

$$\Delta ABP \sim \Delta AEG,$$

und daher

$$\angle AGE = \angle APB$$
$$\text{und } \angle AEG = \angle ABP.$$

Ferner ist $\angle AEG$ = Abschnittswinkel HEP = Peripheriewinkel PFE und demgemäß

$$\angle PFE = \angle PBA,$$
$$\text{also } EF \parallel AB.$$

Determination. Der Gang der Lösung bleibt unverändert, auch wenn die Linie AB den gegebenen Kreis in einem Punkte berührt.

IV. Bezeichnungen.

Eine consequente, feststehende Bezeichnung der Figuren ist bei geometrischen Aufgaben sehr vortheilhaft, denn

a) dieselbe sichert dem Ausdruck Kürze und Schärfe,
b) sie erleichtert die Übersicht ganzer Reihen von Aufgaben (z. B. das Dreieck ꝛc. betreffend),
c) sie ermöglicht das Verständniß einer in Worten angegebenen Construction auch ohne Zeichnung der Figur.

Am gebräuchlichsten sind nachstehende Bezeichnungen, welche auch bei allen folgenden Aufgaben dieses Buches angewendet worden.

1. Dreiecke.

Das Dreieck (Δ) wird stets durch ABC bezeichnet.

A, B und C sind die Winkel des Dreiecks, die gewöhnlich mit α, β, γ bezeichnet werden.

a, b und c sind die Seiten des Dreiecks, und zwar liegt a dem Winkel A, b dem Winkel B, c dem Winkel C gegenüber.

h_a, h_b und h_c sind die Höhen des Dreiecks, nämlich die aus den

Digitized by Google

Eckpunkten A, B und C auf die Seiten a, b und c, oder auf deren Verlängerungen, gefällten Perpendikel; und zwar steht h_a auf a, h_b auf b, h_c auf c.

t_a, t_b und t_c sind die Schwerpunkts-Transversalen, von denen

t_a den Eckpunkt A mit dem Halbirungspunkte von a
t_b „ „ B „ „ „ „ b } verbindet.
t_c „ „ C „ „ „ „ c

m_a, m_b und m_c sind die Mittellinien (Halbirungslinien) der Dreieckswinkel bis zu den Gegenseiten a, b und c, nämlich:

m_a halbirt den ∠ A und geht von A bis zur Seite a,
m_b „ „ ∠ B „ „ „ B „ „ „ b,
m_c „ „ ∠ C „ „ „ C „ „ „ c,

r ist der Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

ϱ „ „ „ „ „ „ einbeschriebenen „

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c sind die Radien der den Seiten a, b und c (zwischen den Verlängerungen der beiden andern Seiten (resp. bc, ac und ab) anbeschriebenen Kreise.

(a + b) ist die Summe der Seiten a und b.

(a — b) ist die Differenz der Seiten a und b.

(a + b + c) ist die Summe der drei Seiten.

Im gleichseitigen Dreieck ist a die Seite, h die Höhe.

Im rechtwinkligen Dreieck ist:

a die Hypotenuse,
b die größere Kathete,
c die kleinere Kathete,
p die Projection von b auf a,
q die Projection von c auf a.

Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck bezeichnet b jede der beiden Katheten.

Im gleichschenkligen Dreieck ist:

a die Basis, A der Winkel an der Spitze;
b der Schenkel, B der Winkel an der Basis.

2. Vierecke.

Das Viereck wird durch ABCD bezeichnet.

A, B, C, D sind die Winkel an den gleichnamigen Eckpunkten.

a ist die Seite AB. c ist die Seite CD.
b „ „ „ BC. d „ „ „ DA.

Digitized by Google

e ist die Diagonale AC. h'_a die Höhe aus B auf AC.
e' „ „ „ BD. h''_a „ „ „ D „ AC.

Im Trapez ist

a die größere parallele Seite AB, b die nichtparallele Seite BC,
c „ kleinere „ „ CD, d „ „ „ DA,
h die Höhe (Abstand der parallelen Seiten von einander).
α der spitze Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden.
β der Winkel CBD den die Diagonale BD = e' mit der Seite BC = b bildet.

Im gleichschenkligen Trapez ist

a die größere parallele Seite. b der Schenkel.
c „ kleinere „ „

Im Deltoid ist

a die größere Seite, α der ungleichschenklige Winkel.
b „ kleinere „ β und γ die gleichschenkligen Winkel.
e die Diagonale AC, welche durch die Scheitel der gleichschenkligen Winkel geht.
e' die Diagonale BD, welche durch die Scheitel der ungleichschenkligen Winkel geht.

3. Kreise.

Man bezeichnet Kreise, deren Lage und Größe gegeben ist, mit K, K′, K″ ꝛc., die Mittelpunkte mit M, M′, M″ ꝛc., die zugehörigen Radien mit r, r′, r″ ꝛc.

ϱ, ϱ' sind Radien gesuchter Kreise.
s, s′ sind Sehnen von gegebener Länge.

Ferner bezeichnet

⊙ einen zu construirenden Kreis,
P einen Punkt, durch den die Peripherie gehen soll,
L eine Linie, die von ihr berührt werden soll,
K einen Kreis, der von ihr berührt werden soll,
P_b, daß die Tangente von P an den gesuchten Kreis = b sein soll.
L_s, K_s, daß der gesuchte Kreis von L oder K die Sehne s abschneiden soll.

4. Punkte, Linien und Winkel (im Allgemeinen).

P, P′, P″ oder A, B, C ꝛc. sind gegebene Punkte.
X, Y, Z ꝛc. sind gesuchte Punkte.

Digitized by Google

L, L′, L″ ꝛc. bedeuten Linien, deren Lage gegeben iſt.
a, b, c ꝛc. „ „ „ Länge „ „
x, y, z ꝛc. „ der Länge nach geſuchte Linien.
α, β, γ ꝛc. „ gegebene Winkel.
∠(ab) bezeichnet den von a und b gebildeten Winkel.
∠(LL′) „ „ „ L „ L′ „ „
(a : b) bezeichnet das gegebene Verhältniß der Linien a und b.
L ∥ L′ bedeutet L parallel mit L′; a > b d. i. a größer als b;
b < a d. i. b kleiner als a.

Anmerkung. Zu mathematiſchen Bezeichnungen werden vielfach Griechiſche Buchſtaben angewendet. Die Zeichen und Namen der einzelnen Buchſtaben des kleinen Griechiſchen Alphabets ſind folgende.

α	alpha	= a.	ν	ny	= n.
β	beta	= b.	ξ	xi	= x.
γ	gamma	= g.	ο	omikron	= o.
δ	delta	= d.	π	pi	= p.
ε	epsilon	= e.	ρ	rho	= r.
ζ	zeta	= z.	σ	sigma	= s.
η	eta	= e.	τ	tau	= t.
ϑ	theta	= th.	υ	ypsilon	= y.
ι	iota	= i.	φ	phi	= ph.
κ	kappa	= k.	χ	chi	= ch.
λ	lambda	= l.	ψ	psi	= ps.
μ	my	= m.	ω	omega	= o.

Digitized by Google

Abschnitt I.

Congruenz der geradlinigen Figuren.

1. Winkel, Linien und Punkte.

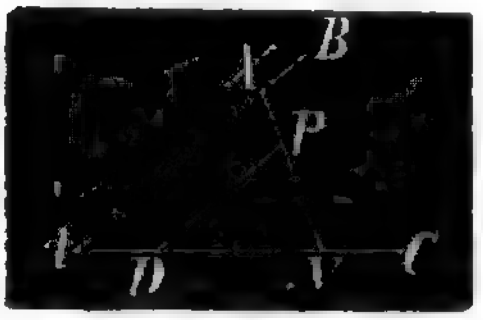
1. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″. Einen Punkt X zu finden, der von den drei gegebenen Punkten gleiche Entfernung hat.

Construction. Man verbinde P mit P′ durch eine Gerade PP′, wie auch P′ mit P″ durch eine Gerade P′P″; halbire PP′ und P′P″; errichte in den Halbirungspunkten nach einerlei Seite zwei Lothe und verlängere dieselben bis zum Schnittpunkte X: so ist X von P, P′, P″ gleich weit entfernt.

Beweis mittels des gleichschenkligen Dreiecks.

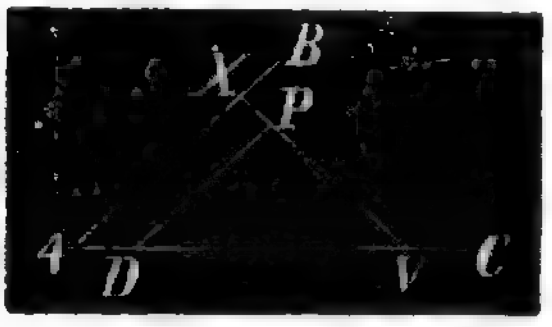
Determination. Liegen P, P′, P″ in einer Richtung, so ist die Aufgabe unmöglich.

2. Aufgabe. Gegeben ∠ A, und P innerhalb desselben. Durch P eine Linie XY zu ziehen, die vom Winkel ein gleichschenkliges Dreieck AXY abschneidet, dessen Spitze A ist.



Construction. Man ziehe aus P parallel zu BA eine Linie PD bis an den Schenkel AC, mache DY = PD und ziehe von Y durch P bis zum Schenkel AB eine Linie YX: so ist AX = AY.

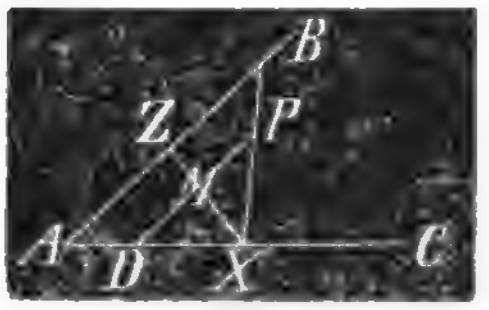
3. Aufgabe. Gegeben ∠ A, und innerhalb desselben P. Durch P eine Linie zu ziehen, daß ihr Abschnitt XY zwischen den Schenkeln des ∠ A gleich dem einen Schenkel AX werde.



Construction. Man ziehe aus P parallel zu BA eine Linie PD bis an den Schenkel AC; schneide aus P mit einer Zirkelöffnung = PD den Schenkel AC in Y und ziehe von Y durch P bis an den Schenkel AB die Linie YX: so ist XY = XA.

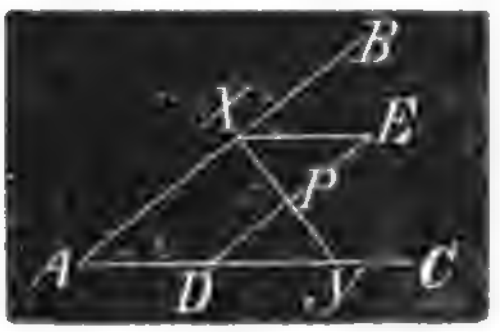
Digitized by Google

4. Aufgabe. Gegeben ∠ A, und innerhalb desſelben P. Durch P eine Linie PX nach dem einen Schenkel AC zu ziehen, daß die Halbirungslinie XZ des ∠ PXA ſenkrecht auf dem andern Schenkel AB ſteht.



Conſtruction. Man ziehe aus P parallel zu BA eine Linie PD bis an den Schenkel AC; errichte auf der Mitte von PD ein Loth MX, das den Schenkel AC in X ſchneidet; verlängere XM über M bis zum Punkte Z im Schenkel AB und verbinde zuletzt X mit P: ſo halbirt XZ den Winkel PXA und ſteht ſenkrecht auf AB.

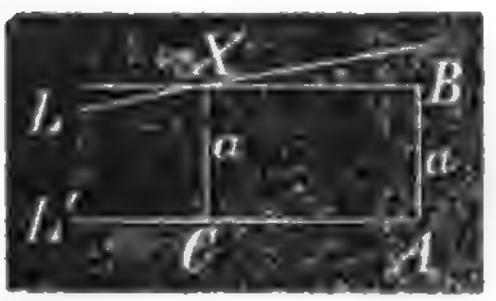
5. Aufgabe. Gegeben ∠ A, und innerhalb desſelben P. Durch P eine Linie zu ziehen, daß der Abſchnitt XY zwiſchen den Schenkeln des ∠ A durch den Punkt P halbirt wird.



Conſtruction. Man lege durch P parallel zu dem Schenkel AB eine unbegränzte Gerade, welche den andern Schenkel AC in D ſchneidet; mache PE = PD; ziehe aus E parallel zu CA eine Linie EX, welche den Schenkel AB in X ſchneidet; verbinde X mit P und verlängere XP über P bis zum Punkte Y im Schenkel AC: ſo iſt XY im Punkte P halbirt.

Beweis. △ PDY ≅ △ PEX.

6. Aufgabe. Gegeben L und L′. In L einen Punkt X zu finden, daß das Loth von X auf L′ eine vorgeſchriebene Länge (XC = a) habe.

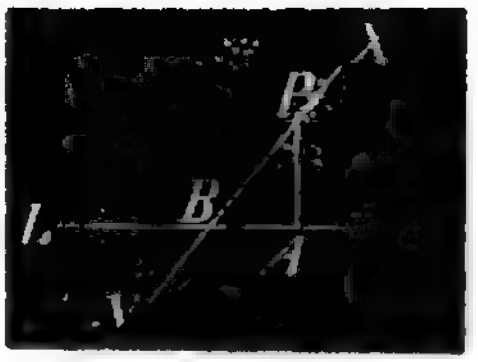


Conſtruction. Man errichte in einem beliebigen Punkte auf L′ ein Loth AB = a; lege durch B parallel zu L′ eine Gerade, welche die L in einem Punkte X ſchneidet, und fälle aus X ein Loth XC auf L′: ſo iſt das Loth XC = a.

Beweis. Parallelen zwiſchen Parallelen ſind gleich.

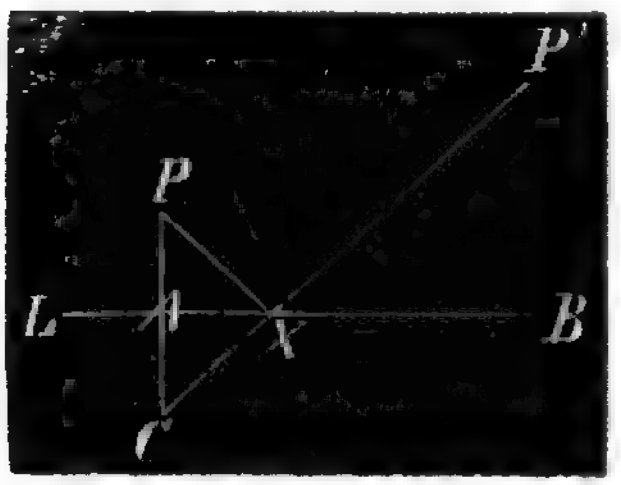
7. Aufgabe. Gegeben L, und außerhalb derſelben P. Durch P eine Gerade XY zu ziehen, welche die L unter einem gegebenen Winkel PBA = α ſchneidet.

Digitized by Google



Construction. Man fälle aus P ein Loth PA auf L, trage an AP in P einen Winkel $YPA = (90° - \alpha)$ an und verlängere den Schenkel PY desselben gehörig nach beiden Seiten: so wird die L von der XY in B geschnitten, und zwar unter dem Winkel $PBA = \alpha$.

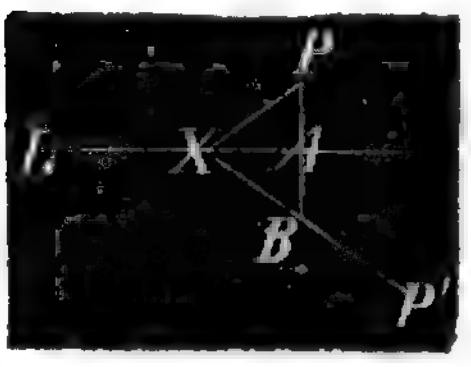
8. Aufgabe. Gegeben L, und außerhalb derselben auf einerlei Seite P und P′. Man soll in L einen Punkt X finden, daß PX und P′X mit L gleiche Winkel ($PXA = P'XB$) bilden.



Analysis. Ist X der gesuchte Punkt, $\angle PXA = P'XB$ und XC die Verlängerung von P′X, so ist (als Scheitelwinkel) auch $\angle AXC = \angle P'XB$ und daher $\angle AXC = \angle PXA$. Wird nun aus P ein Loth PA auf L gefällt und dasselbe bis zum Schnittpunkt C mit der Richtung P′C verlängert, so ist $\Delta PXA \cong \Delta CXA$ und demgemäß die Lage des Punktes C, der Linie CP′ und des Punktes X bestimmt.

Construction. Man fälle aus P ein Loth PA auf L; verlängere PA über A, so daß $AC = AP$ wird; ziehe CP′, wodurch sich Punkt X (als Schnittpunkt der L mit der CP′) ergiebt, und verbinde X mit P: so ist $\angle PXA = \angle P'XB$.

9. Aufgabe. Gegeben L, und außerhalb derselben auf verschiedenen Seiten P und P′. In L einen Punkt X zu finden, daß PX und P′X mit der zwischen ihnen befindlichen Strecke XA der gegebenen Linie L gleiche Winkel ($PXA = P'XA$) bilden.

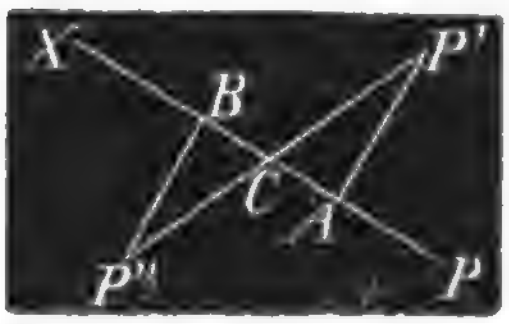


Construction. Man fälle aus P ein Loth PA auf L; verlängere PA über A, so daß $AB = PA$ wird; verbinde B mit P′; verlängere P′B über B bis an die Linie L, wodurch sich der Punkt X in L findet, und ziehe zuletzt XP: so ist $\angle PXA = \angle P'XA$.

Digitized by Google

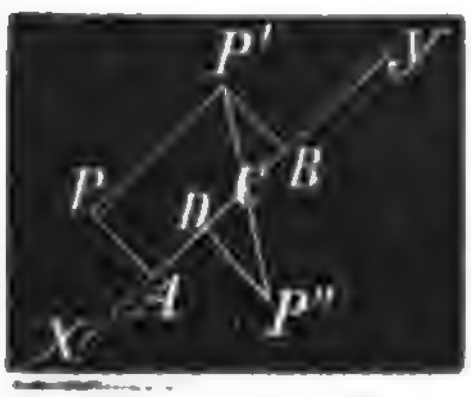
10. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″. Durch P eine Linie PX zu ziehen, von der P′ und P″ gleiche ſenkrechte Entfernung haben.

Conſtruction. Liegen P′ und P″ auf einerlei Seite der PX, ſo hat man P′ und P″ durch eine Gerade P′P″ zu verbinden und durch P eine Parallele PX zu P′P″ zu legen.



Liegen P′ und P″ auf verſchiedenen Seiten der PX, ſo hat man P′ und P″ durch eine Gerade P′P″ zu verbinden, letztere in C zu halbiren, den Halbirungspunkt C mit P zu verbinden, die Linie PC über C (etwa bis X) zu verlängern und aus P′ und P″ die Lothe P′A und P″B auf PX zu fällen. Dann iſt P′A = P″B.

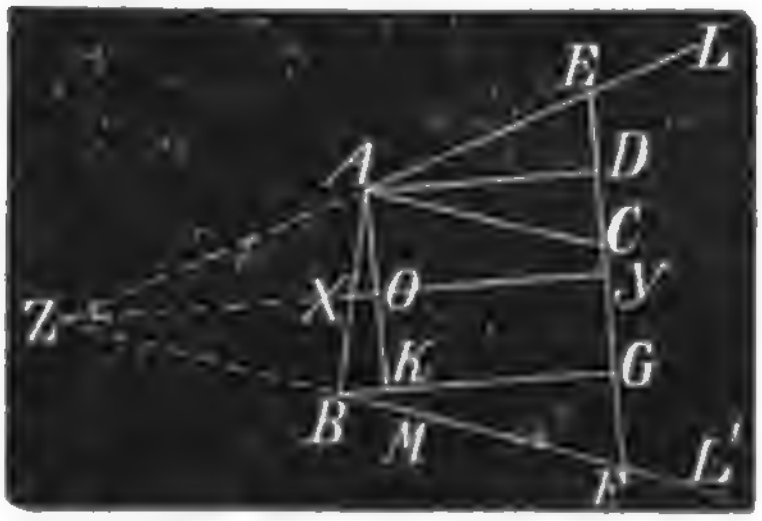
11. Aufgabe. Gegeben P, P′, P″, und zwar nicht in einer Richtung. Eine Gerade XY zu finden, von welcher die drei Punkte gleiche ſenkrechte Entfernung haben.



Conſtruction. Man verbinde P′ mit P und P″ durch die Geraden PP′ und P′P″; lege durch den Halbirungspunkt C der P′P″ eine zu PP′ parallele Linie XY und fälle aus P, P′, P″ die Lothe PA, P′B, P″D auf XY: ſo iſt PA = P′B = P″D.

Beweis. PA = P′B als Parallelen zwiſchen Parallelen. P′B = P″D als homologe Seiten der congruenten rechtwinkligen Dreiecke P′BC und P″DC.

12. Aufgabe. Gegeben L und L′. Ohne ſie bis zu ihrem Schnittpunkte (Z) zu verlängern, eine Linie XY zu ziehen, welche gehörig verlängert den von ihnen (in Z) gebildeten Winkel halbiren würde.



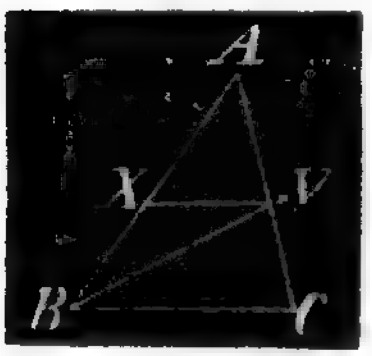
Analyſis. Es ſei ZXY die Halbirungslinie des Winkels EZF und ſenkrecht auf EF, welche von den bis zum Schnittpunkt Z verlängert gedachten Linie L und L′ gleiche Strecken ZE = ZF abſchneidet: ſo iſt ZEF ein gleichſchenkliges Dreieck und die Baſis EF durch die ZY in Y hal-

Digitized by Google

birt. Zieht man nun aus A in der Linie L die zu L' parallele Gerade AC, so ist ∠ EAC = ∠ EZF und kann derselbe halbirt werden, und zwar durch AD, welche mit ZY parallel sein muß. Hiermit ist die Richtung der gesuchten Halbirungslinie XY gefunden. Wird ferner aus A ein Loth AB auf L' gefällt und aus B die Linie BG parallel zu AD gezogen, so ist auch BG senkrecht auf EF und ∠ FBG = ∠ EAD = der Hälfte des Winkels EZF am Schnittpunkte von L und L'. Um endlich für die gesuchte Halbirungslinie XY, von der erst Punkt Y bekannt ist, einen zweiten Punkt O zu erhalten, hat man von A auf BG ein Loth AK zu fällen, dasselbe bis zum Punkt M in der Linie L' zu verlängern und AM in O zu halbiren. Da AM und EF parallel sind, so geht die gesuchte XY durch die Halbirungspunkte derselben.

Construction. Man ziehe aus dem Punkte A in der Linie L die mit L' parallele Linie AC; halbire ∠ EAC durch die Linie AD; fälle von A auf L' ein Loth AB; ziehe aus B die Linie BG ‖ AD; schneide auf BG aus dem Punkte G eine Strecke GK = DA ab; lege durch die Punkte A und K eine Linie AM, von der die L' in M geschnitten wird; halbire AM in O; errichte in O ein Loth OY auf AM und verlängere OY über O, etwa bis X: so ist XY die gesuchte Linie.

13. Aufgabe. In einem gegebenen Dreieck ABC eine Parallele XY mit BC zu ziehen, daß BX = XY wird.



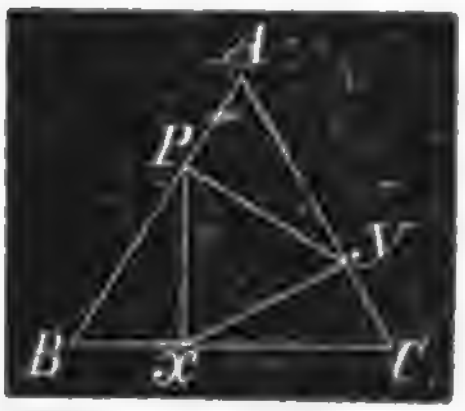
Analysis. Es sei XY ‖ BC und zugleich XY = XB. Dann ist ∠ AXY = ∠ ABC und, da ∠ AXY als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks XBY doppelt so groß ist als ein Basiswinkel XBY, auch ∠ XBY = der Hälfte des Winkels ABC. Die Halbirungslinie des Winkels ABC gehörig verlängert, schneidet die AC in Y, durch welchen Punkt die gesuchte Parallele XY gelegt werden muß.

Construction. Man halbire ∠ ABC, verlängere die Halbirungslinie BY bis an die Seite AC und ziehe durch den Punkt Y, in welchem die AC von der BY geschnitten wird, eine Parallele XY mit BC: dann ist XY = BX.

Digitized by Google

Beweis. Da XY ‖ BC iſt, ſo findet ſich ∠ AXY = ∠ ABC = ∠ XBY + XYB. Es iſt aber ∠ XBY = ∠ $\frac{ABC}{2}$ per constr.; mithin ebenfalls ∠ XYB = ∠ $\frac{ABC}{2}$; alſo Δ XBY gleichſchenklig, nämlich BX = XY.

14. Aufgabe. In ein gegebenes gleichſeitiges Dreieck ein zweites PXY ſo zu conſtruiren, daß eine Ecke des letzteren in einen auf einer Seite des erſteren gegebenen Punkt P fällt.



Conſtruction. Da Punkt P auf der Seite AB gegeben iſt, ſo hat man die Strecke AP auf der BC aus dem Eckpunkte B, wie auch auf der AC aus dem Eckpunkte C abzuſchneiden, ſo daß BX = CY = AP wird, und alsdann die Verbindungslinien PX, XY und PY zu ziehen. Das hierdurch entſtehende Dreieck PXY iſt gleichſeitig.

Beweis. Δ APY ≅ Δ BPX ≅ Δ CXY (weil ſie in zwei Seiten und dem von dieſen eingeſchloſſenen Winkel übereinſtimmen, daher PY = PX = XY.

15. Aufgabe. In ein gegebenes gleichſeitiges Dreieck ABC ein zweites PXY ſo zu conſtruiren, daß die Seiten des letzteren auf denen des erſteren ſenkrecht ſtehen. (S. die vorige Figur.)

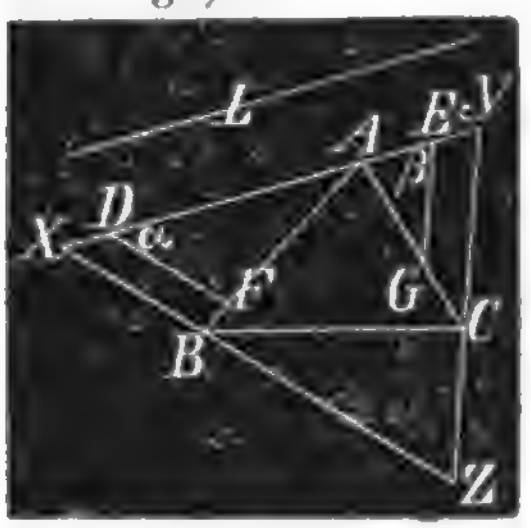
Conſtruction. Man mache jedes der abgeſchnittenen Stücke AP, BX und CY = $\frac{1}{3}$ der ganzen Seite AB und ziehe ſodann PX, XY, YP; ſo ſtehen die Seiten YP, PX und XY der Reihe nach ſenkrecht auf den entſprechenden Seiten AB, BC, und AC.

Beweis. Zieht man in dem gegebenen gleichſeitigen Dreieck ABC z. B. aus A eine Höhe, ſo wird durch letztere eine Seite BC halbirt und iſt alsdann in jedem der beiden entſtandenen rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuſe das Doppelte der kleineren Kathete. Da nun in obiger Figur auch jeder größere Abſchnitt (z. B. PX) das Doppelte des kleineren Abſchnitts (BX) iſt und ſämmtliche Abſchnitte aus einem gemeinſamen Eckpunkte B auf den Seiten des Dreiecks ABC gemacht worden ſind, ſo muß die Seite PX des einbeſchriebenen Dreiecks mit der entſprechen-

den Höhe des gegebenen Dreiecks parallel sein, woraus folgt, daß PX senkrecht auf BC steht ꝛc.

Anmerkung. Kürzer wird der Beweis, wenn man sofort auf die Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke eingeht.

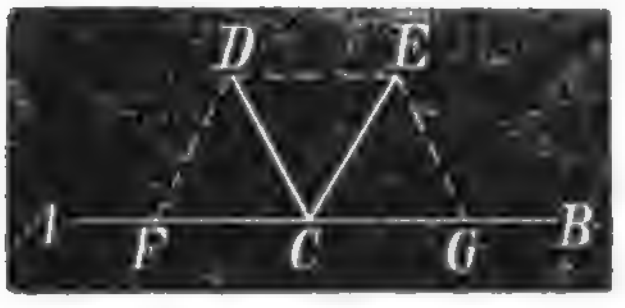
16. Aufgabe. Ein Dreieck XYZ zu construiren, von welchem zwei Winkel α und β gegeben sind, so daß eine Seite desselben einer gegebenen Geraden L parallel sei und seine Seiten einzeln durch je einen Eckpunkt eines gegebenen Dreiecks ABC gehen.



Construction. Man lege parallel zu L durch den Eckpunkt A eine Gerade (XY) von beliebiger Länge; erwähle auf dieser Geraden auf verschiedenen Seiten des Punktes A beliebig zwei andere Punkte D und E, trage an XY in D einen Winkel YDF = α und in E einen Winkel AEG = β an; ziehe alsdann durch B eine Parallele XZ zu DF, so wie durch C eine Parallele YZ zu EG, und verlängere die genannten Parallelen bis zu ihrem Schnittpunkte Z, wie auch bis zu den Punkten X und Y in der Geraden XY: so ist XYZ das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist unbestimmt, indem die gegebenen Winkel α und β mit ihrem Supplementwinkel auch an andere Seiten des gesuchten Dreiecks angetragen werden können, wodurch verschiedene Dreiecke entstehen, die aber sämmtlich dem Dreieck XYZ ähnlich sind.

17. Aufgabe. Einen gestreckten Winkel zu trisociren (d. i. in drei gleiche Theile zu zerlegen).



Construction. Der dritte Theil des gestreckten Winkels ACB beträgt 60°, d. i. ebenso viel als jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks. Man schneide daher aus dem Scheitel C des gestreckten Winkels nach beiden Seiten auf den Schenkeln desselben gleiche Stücke CF = CG ab und errichte über jedem derselben ein gleichseitiges Dreieck (CFD und CGE): so ist ∠ ACB trisecirt, nämlich ∠ ACD = ∠ DCE = ∠ BCE = $\frac{1}{3}$ des gestreckten Winkels ACB.

Digitized by Google

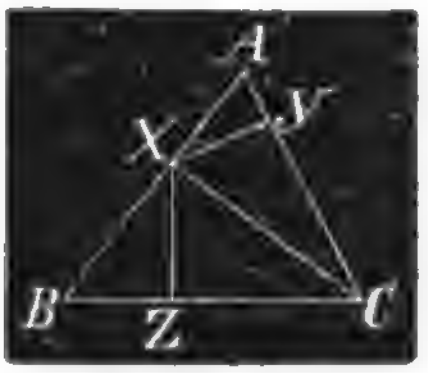
18. Aufgabe. Einen rechten Winkel zu triſeciren.

Conſtruction. Man conſtruire über dem einen Schenkel des rechten Winkels ein gleichſeitiges Dreieck, wodurch der gegegebene Winkel in zwei Winkel zerlegt wird, von denen der eine $\frac{2}{3}$, der andere aber $\frac{1}{3}$ R beträgt; alsdann halbire man den $\frac{2}{3}$ R großen Winkel: ſo iſt der rechte Winkel in drei gleiche Theile zerlegt.

19. Aufgabe. Einen Winkel von 15 Grad zu conſtruiren.

Conſtruction. Man conſtruire ein gleichſeitiges Dreieck, halbire einen Winkel desſelben, wodurch ſich ein Winkel von 30 Grad ergiebt; alsdann halbire man auch den 30 Grad großen Winkel: ſo hat jeder der zuletzt entſtehenden Winkel 15 Grad.

20. Aufgabe. Auf einer Seite AB eines Dreiecks ABC einen Punkt X zu finden, der von den beiden andern Seiten desſelben gleich weit entfernt iſt.



Analyſis. Es ſei X der geſuchte Punkt und daher XY = XZ, wie auch ∠ CZX = ∠ CYX = R: ſo iſt Δ CZX ≅ Δ CYX und demgemäß ∠ XCZ = ∠ XCY.

Conſtruction. Man halbire ∠ ACB, verlängere die Halbirungslinie CX bis an die Seite AB, wodurch ſich der geſuchte Punkt X ergiebt, und fälle alsdann aus X Lothe XZ und XY auf die beiden andern Seiten BC und AC: ſo iſt XZ = XY.

Beweis. Δ CZX ≅ Δ CYX; weil ſie die Seite CX gemein haben und in zwei gleichliegenden Winkeln übereinſtimmen.

21. Aufgabe. Drei ſich ſchneidende Linien ſind gegeben. Einen Punkt X zu finden, der von ihnen gleich weit entfernt iſt.

Conſtruction. Die drei gegebenen Linien ſeien a, b, c.

Erſter Fall.

a ∥ b, und beide von c durchſchnitten.

Man halbire die beiden innern Gegenwinkel; verlängere die Halbirungslinien, bis ſie ſich ſchneiden und fälle aus dem Schnittpunkte X Lothe auf a, b und c: ſo ſind letztere gleich und bilden die auf a und b gefällten Lothe zuſammen eine gerade Linie. (Beweis mittels congruenter Dreiecke.)

Digitized by Google

Zweiter Fall.

a und b sind nicht parallel, beide von c durchschnitten.

Construction und Beweis wie vorhin. Die aus X gefällten Lothe auf a und b fallen nicht in eine gerade Linie.

Dritter Fall.

a, b und c schneiden sich in drei Punkten.

Die von den drei Linien eingeschlossene Figur ist ein Dreieck. Man halbire zwei Winkel desselben, verlängere die Halbirungslinien bis zum Schnittpunkt X und fälle aus X Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks: so sind die drei Perpendikel gleich.

Ein anderer Punkt X ergiebt sich, wenn man auf der Mitte zweier Dreiecksseiten Lothe errichtet und dieselben so weit verlängert, daß sie sich schneiden. Wird dieser Schnittpunkt X mit den drei Eckpunkten des Dreiecks durch gerade Linien verbunden, so sind letztere als Hypotenusen congruenter rechtwinkliger Dreiecke gleich.

Vierter Fall.

a, b und c schneiden sich in einem einzigen Punkte.

Außer dem gemeinsamen Schnittpunkte giebt es keinen andern Punkt, der den Anforderungen der Aufgabe entspricht.

---

2. Construction des rechtwinkligen Dreiecks.

22. Aufgabe. Gegeben die Hypotenuse = a, die eine Kathete = b.

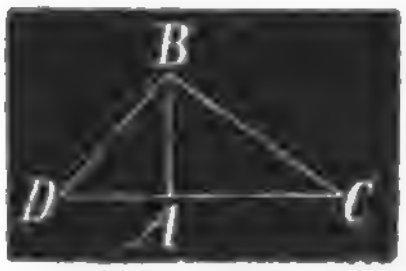
Construction. Man construire einen rechten Winkel, mache den einen Schenkel desselben = b, schneide aus dem freien Endpunkte des Schenkels b mit einer Geraden = a den andern Schenkel, und verbinde den Schnittpunkt mit dem erwähnten Endpunkte von b.

23. Aufgabe. Gegeben b und β.

Construction. Man trage an b in dem einen Endpunkte den Complementwinkel von β, in dem andern Endpunkte aber einen Rechten an und verlängere die Schenkel dieser beiden Winkel bis zum Schnittpunkt.

24. Aufgabe. Gegeben die Summe der Katheten b + c = s; die Hypotenuse = a.

Digitized by Google



Analyſis. Es ſei BC = a, AB + AC = s. Wird nun AC über A verlängert und AD = AB gemacht und D mit B verbunden; ſo iſt CD = s, und in dem rechtwinklig-gleichſchenkligen Dreieck ABD ∠ ADB = ∠ ABD = $\frac{1}{2}$ R, und demgemäß Δ CBD aus CD = s; BC = a und ∠ BDC = $\frac{R}{2}$ conſtruirbar, indem der Winkel CBD, welcher der größeren Seite CD gegenüberliegt, offenbar größer als $\frac{1}{2}$ R ausfällt, weil bereits ein Winkel ABD von dieſer Größe als ein Theil von ihm auftritt.

Conſtruction. Man trage an CD = s im Endpunkte D einen Winkel CDB = $\frac{1}{2}$ R an, ſchneide aus dem andern Endpunkte C der CD mit einer Geraden = a den Schenkel BD oder deſſen Verlängerung in B und verbinde zuletzt C mit B. Wird nun aus B ein Loth BA auf CD gefällt, ſo iſt Δ ABC das verlangte.

Beweis. Da BA ſenkrecht auf CD ſteht und ∠ BDC = $\frac{1}{2}$ R gemacht worden, ſo iſt ∠ ABD auch = $\frac{1}{2}$ R, mithin in dem Δ ABD Kathete BA = AD; folglich DA + AC = BA + AC = s. Ferner iſt BC = a per constr.; daher entſpricht Δ ABC den Bedingungen der Aufgabe.

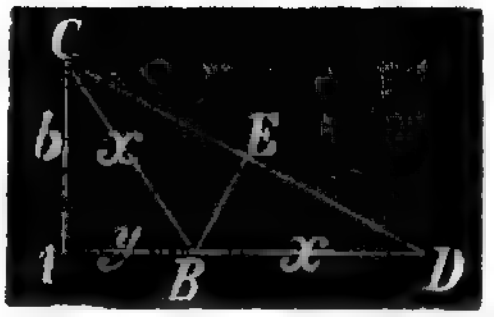
Determination. Iſt $s^2 = 2a^2$ gegeben, ſo wird b = c; d. h. Δ ABC iſt alsdann gleichſchenklig-rechtwinklig. Findet ſich aber $s^2 > 2a^2$, ſo iſt die Conſtruction unmöglich.

25. Aufgabe. Gegeben die Summe der Katheten b + c = s und ein ſpitzer Winkel (B oder C).

Conſtruction. (S. die vor. Figur.) Wenn ∠ C gegeben iſt, ſo hat man an eine Gerade CD = s im Endpunkte C einen ∠ BCD = C, und in dem andern Endpunkte D einen ∠ BDC = $\frac{1}{2}$ R anzutragen, und die Schenkel der beiden Winkel bis zum Schnittpunkte B zu verlängern. Wird alsdann aus B ein Loth BA auf CD gefällt, ſo iſt Δ ABC das geſuchte.

Iſt ∠ B gegeben, ſo hat man an CD = s in C den Complementwinkel des gegebenen Winkels B und in D wieder ∠ BDC = $\frac{1}{2}$ R anzutragen, und im Übrigen wie vorhin zu verfahren.

26. Aufgabe. Gegeben eine Kathete = b, und die Summe der Hypotenuſe (x) und der andern Kathete (y) = s.



Analyſis. Iſt ABC das geſuchte Dreieck, mithin AC = b; ſo findet ſich, wenn man AB = y über B verlängert und BD = BC = x macht: AB + BD = x + y = s, und iſt daher das rechtwinklige Dreieck CAD aus den Katheten AC = b und AD = s leicht zu conſtruiren. Da ferner Δ BCD gleichſchenklig iſt, ſo muß ſich die Spitze desſelben, nämlich der Punkt B, ergeben, wenn man auf der Mitte der Baſis CD ein Loth errichtet, und dasſelbe bis an die AD verlängert.

Conſtruction. Man conſtruire ein rechtwinkliges Dreieck CAD aus den Katheten AC = b und AD = s, errichte auf der Mitte der Hypotenuſe CD ein Loth EB, welches die AD in B ſchneidet, und verbinde B mit C: ſo iſt Δ ABC das geſuchte.

Beweis. AC = b per constr. Δ BEC ≅ Δ BED, daher BC = BD. Mithin iſt AB + BC = AB + BD = y + x = s.

Determination. Die Conſtruction iſt nur möglich, wenn b < s gegeben iſt.

27. Aufgabe. Gegeben die Summe der Hypotenuſe (BC) und einer Kathete (AB) = s und ein ſpitzer Winkel ABC = β. (S. die vor. Figur.)

Analyſis. Iſt ABC das geſuchte Dreieck, BD die Verlängerung von AB und zugleich BD = BC, ſo iſt ∠ ABC, der Außenwinkel an der Spitze des gleichſchenkligen Dreiecks BCD, das Doppelte des Winkels ADC; mithin $\angle ADC = \frac{\beta}{2}$, und iſt daher das rechtwinklige Dreieck CAD aus der Kathete AD = s und dem anliegenden ſpitzen Winkel ADC = ½ β conſtruirbar. Aus dem Δ ACD ergiebt ſich aber in bekannter Weiſe auch Δ BCD, ſo wie Δ ABC.

Conſtruction. Man conſtruire aus der Kathete AD = s und dem anliegenden ſpitzen Winkel ADC = ½ β ein rechtwinkliges Dreieck CAD, errichte auf der Mitte der Hypotenuſe CD ein Loth EB, welches die AD in B ſchneidet, und verbinde B mit C: ſo iſt Δ ABC das verlangte.

Beweis in der Analyſis und Conſtruction enthalten.

Determination. Iſt der andere ſpitze Winkel ACB = γ

Digitized by Google

gegeben, ſo findet ſich $\angle ABC = R - \gamma$, mithin $\angle ADC = \frac{1}{2}(R - \gamma)$.

28. Aufgabe. Gegeben die Hypotenuſe $BC = a$, und die Differenz der Katheten $CD = d$.

Analyſis. Es ſei ABC das verlangte Dreieck, $BC = a$ und $AC - AB = AC - AD = CD = d$, ſo iſt ΔABD ein rechtwinklig-gleichſchenkliges Dreieck, daher $\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2} R$ und $\angle CDB = 1\frac{1}{2} R$; folglich ΔBCD aus a, d und $\angle CDB = 1\frac{1}{2} R$ conſtruirbar. Aus ΔBCD ergiebt ſich aber leicht ΔABC.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BC = a$, $CD = d$ und $\angle CDB = 1\frac{1}{2} R$ ein ΔBCD, und fälle aus B ein Loth BA auf die Verlängerung von CD: ſo iſt ΔABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. $BC = a$ per constr. Da $\angle CDB = 1\frac{1}{2} R$ iſt, ſo iſt $\angle ADB = \frac{1}{2} R$, und daher in dem rechtwinkligen Dreieck ABD auch $\angle ABD = \frac{1}{2} R$. Demgemäß iſt $AD = AB$ und $AC - AD = CD = d$.

Determination. Die Conſtruction iſt unmöglich, wenn ſich findet:

$$d^2 \geqq 2a^2.$$

29. Aufgabe. Gegeben die Differenz der Katheten $= d$ und ein ſpitzer Winkel ($\angle ABC = \beta$ oder $\angle ACB = \gamma$).

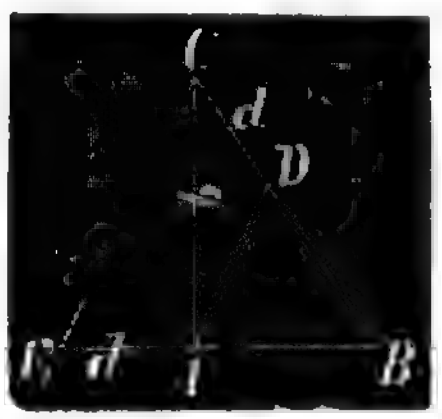
Analyſis. (Fig. der 28. Aufg.) Wenn ABC das geſuchte Dreieck, $CD = AC - AD = AC - AB = d$ und $\angle ABC = \beta$ iſt, ſo findet ſich mit Hülfe des rechtwinklig-gleichſchenkligen Dreiecks ABD Winkel $CDB = 1\frac{1}{2} R$, $\angle CBD = \beta - \frac{1}{2} R$, während $\angle BCD$ als Complementwinkel von $\beta = R - \beta$ ſein muß. Es läßt ſich alſo ΔBCD aus $CD = d$, $\angle C = R - \beta$ und $\angle CDB = 1\frac{1}{2} R$ conſtruiren. Aus ΔBCD ergiebt ſich aber ΔABC.

Conſtruction. Man trage an $CD = d$ im Endpunkte C einen Winkel $BCD = R - \beta$, und im Endpunkte D einen Winkel $BDC = 1\frac{1}{2} R$ an, verlängere die Schenkel beider Winkel bis zum Schnittpunkt B und fälle aus B ein Loth BA auf die Verlängerung von CD: ſo iſt ΔABC das geſuchte Dreieck.

Digitized by Google

Beweis in der Analysis und Construction.

30. Aufgabe. Gegeben eine Kathete AC = b, und die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete = d.



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, AC = b und BC − AB = BC − BD = CD = d. Wird nun AB über A verlängert und AE = CD = d gemacht, so ist BE = BC und daher, wenn man EC zieht, Δ BCE gleichschenklig. Es haben aber die Dreiecke BCE und BDA den Winkel B an der Spitze gemein, weshalb auch ihre Basiswinkel übereinstimmen müssen. Hieraus folgt, daß AD parallel mit EC ist.

Construction. Man construire ein rechtwinkliges Dreieck CAE, welches CA = b und AE = d zu Katheten hat; verlängere EA über A, etwa bis B; ziehe aus dem Punkte A zu EC eine Parallele AD, schneide letztere aus C mit einer Geraden AE = d in dem Punkte D und verlängere die Linien EA und CD bis zum Schnittpunkte B: so ist Δ ABC das gesuchte.

Beweis in der Analysis und Construction.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn b > d gegeben ist.

31. Aufgabe. Gegeben die Differenz der Hypotenuse und einer Kathete = d, und ein spitzer Winkel (∠ ACB = γ oder ∠ ABC = β).

Construction.

Erster Fall.

Gegeben ∠ ACB = γ.

Man trage an CD = d im Endpunkte C den Winkel ACB = γ und im Endpunkte D einen Winkel CDA = $\frac{1}{2}(3R - \gamma)$ an; verlängere die Schenkel CA und DA bis zum Schnittpunkt A, so wie CD über D bis zum Schnittpunkt B mit dem auf CA im Punkte A errichteten Lothe AB, so ist Δ ABC das gesuchte, denn

∠ ACD = γ; ∠ CDA = $\frac{1}{2}(3R - \gamma)$; daher ∠ CAD = $\frac{1}{2}(R - \gamma)$;

also ∠ BAD = $R - \frac{1}{2}(R - \gamma) = \frac{1}{2}(R + \gamma)$;

ferner ist ∠ ADB = $2R - \frac{1}{2}(3R - \gamma) = \frac{1}{2}(R + \gamma)$;

mithin ∠ ADB = ∠ BAD

Digitized by Google

und in dem Dreieck BAD Seite $BD = BA$,
woraus folgt:

$$BC - AB = BC - BD = CD = d.$$

Zweiter Fall.
Gegeben $\angle ABC = \beta$.

Man trage an $CD = d$ im Punkte C einen Winkel $ACB = R - \beta$ und im Punkte D einen Winkel $CDA = R + \frac{\beta}{2}$ an; verlängere die Schenkel CA und DA bis zum Schnittpunkte A; errichte in A auf CA ein Loth AB bis zum Schnittpunkt B mit der Verlängerung von CD: ſo iſt Δ ABC das geſuchte; denn $\angle ACD = R - \beta$; $\angle CDA = R + \frac{1}{2}\beta$; daher $\angle CAD = \frac{1}{2}\beta$;

alſo $\angle BAD = R - \frac{1}{2}\beta$;

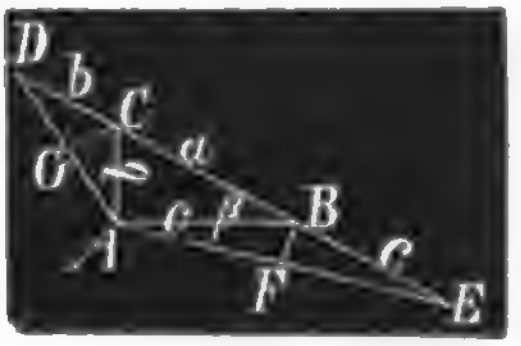
ferner $\angle ADB = 2R - (R + \frac{1}{2}\beta) = R - \frac{1}{2}\beta$;

mithin $\angle BAD = \angle ADB$

und in dem Δ ABD Seite $BD = BA$;
woraus folgt:

$$BC - AB = BC - BD = CD = d.$$

32. Aufgabe. Gegeben $a + b + c = u$ und ein ſpitzer Winkel β.

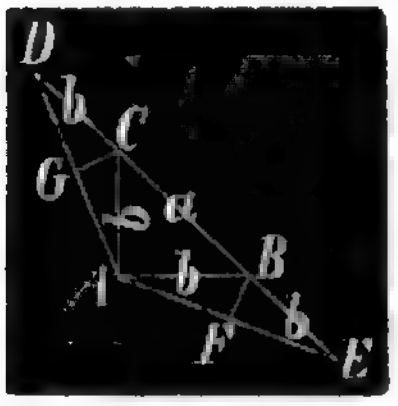


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck und $\angle ABC = \beta$. Wird BC nach beiden Seiten verlängert und $CD = CA$, $BE = BA$ gemacht und A mit D und E verbunden, ſo iſt in dem Dreieck ADE Seite $DE = u$ und $\angle AED = \frac{1}{2}\beta$ und $\angle ADE = \frac{R - \beta}{2}$, alſo Δ ADE conſtruirbar. Aus dieſem Dreieck ergiebt ſich aber leicht auch Δ ABC.

Conſtruction. Man trage an $DE = u$ im Punkte D einen Winkel $ADE = \frac{1}{2}(R - \beta)$, und im Punkte E einen Winkel $AED = \frac{1}{2}\beta$ an; verlängere die Schenkel DA und EA bis zum Schnittpunkte A; halbire AD in G, wie auch AE in F; errichte in jedem Halbirungspunkte ein Loth, verlängere die beiden Lothe GC und FB bis an die Seite DE, wodurch ſich die Punkte C und B finden; und verbinde alsdann A mit C und B: ſo iſt Δ ABC das geſuchte.

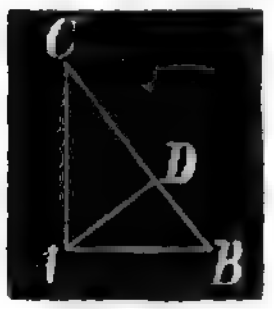
Digitized by Google

33. Aufgabe. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck von gegebenem Umfang $a + 2b = u$ zu construiren.



Construction. Man trage an $DE = a + 2b = u$ in jedem der beiden Endpunkte einen Winkel $ADE = AED = \frac{1}{4} R$ an; verlängere die Schenkel DA und EA bis zum Schnittpunkt A; errichte auf der Mitte von DA und EA die Lothe GC und FB bis zu der Seite DE und verbinde die Schnittpunkte C und B mit A, so ist ΔABC das gesuchte.

34. Aufgabe. Gegeben die Höhe h auf die Hypotenuse, und eine Kathete b oder c.



Construction. Ist $AC = b$ gegeben, so construire man ein rechtwinkliges Dreieck ACD, welches $AC = b$ zur Hypotenuse und $AD = h$ zu der einen Kathete hat, und errichte alsdann in A auf AC ein Loth AB, von dem die Verlängerung der CD in B geschnitten wird: so ist ΔABC das gesuchte.

Ist $AB = c$ gegeben, so hat man aus $AD = h$, als Hypotenuse, und $AB = c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ABD zu construiren, in A auf AB ein Loth AC zu errichten bis zum Schnittpunkt C mit der Verlängerung der BD. Dann ist ΔABC das gesuchte.

35. Aufgabe. Gegeben die Höhe AD auf die Hypotenuse $= h$, und ein Abschnitt der letzteren, $CD = p$ oder $BD = q$. (Fig. der 34. Aufgabe.)

Construction. Ist $CD = p$ gegeben, so construire man aus den Katheten $AD = h$ und $CD = p$ ein rechtwinkliges Dreieck ACD, errichte in A auf CA ein Loth AB bis zum Schnittpunkt B mit der Verlängerung von CD. Dann ist ΔABC das gesuchte.

Ist $BD = q$ gegeben, so construire man aus den Katheten $AD = h$ und $BD = q$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD, errichte in A ein Loth AC, welches die Verlängerung der BD in C schneidet. Hierdurch ergiebt sich das gesuchte Dreieck ABC.

36. Aufgabe. Gegeben die Höhe AD auf die Hypotenuse $= h$ und ein spitzer Winkel $ACB = \gamma$ oder $ABC = \beta$. (Fig. der 34. Aufgabe.)

Digitized by Google

Conſtruction. Iſt $\angle ACB = \gamma$ gegeben, ſo conſtruire man das rechtwinklige Dreieck ACD, in welchem $AD = h$, $\angle ACD = \gamma$, alſo $\angle CAD = R - \gamma$ iſt. Wird nun CD über D verlängert und in A auf AC ein Loth AB von gehöriger Länge errichtet, ſo findet ſich der Schnittpunkt B und hiermit das geſuchte Dreieck ABC.

Iſt $\angle ABC = \beta$, mithin $\angle BAD = R - \beta$ gegeben, ſo conſtruire man zuerſt das rechtwinklige Dreieck ABD, in welchem ebenfalls $AD = h$ iſt, und alsdann in angegebener Weiſe das rechtwinklige Dreieck CAD. Hierdurch ergiebt ſich das geſuchte Dreieck ABC.

---

3. Conſtruction des gleichſchenkligen Dreiecks.

37. Aufgabe. Gegeben a und A.

Conſtruction. Da der Baſiswinkel $= R - \frac{1}{2} A$ iſt, ſo läßt ſich das geſuchte Dreieck, deſſen Baſis $= a$ iſt, leicht conſtruiren.

38. Aufgabe. Ein gleichſeitiges Dreieck aus der Höhe h zu conſtruiren.

Conſtruction. Man conſtruire irgend ein gleichſeitiges Dreieck, zeichne die Höhe desſelben, verlängere oder verkürze letztere auf der dem Eckpunkte zugewendeten Seite, bis ſie $= h$ wird und ziehe durch den oberen Endpunkt der Linie h Parallelen mit den Dreiecksſeiten bis an die Verlängerung der Grundlinie, ſo ergiebt ſich das geſuchte gleichſeitige Dreieck.

39. Aufgabe. Ein gleichſchenkliges Dreieck aus a und h_a zu conſtruiren.

Conſtruction. Man errichte auf der Mitte der Baſis a ein Loth $= h_a$ und verbinde den obern Endpunkt des Lothes h_a mit den Endpunkten der Baſis a.

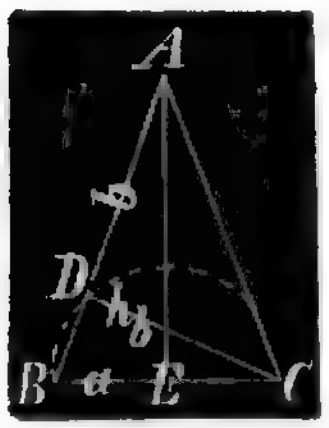
40. Aufgabe. Gegeben A und h_a.

Conſtruction. Man errichte auf einer Linie L ein Loth $= h_a$, trage im obern Endpunkte des Lothes h_a nach beiden Seiten an h_a einen Winkel $= \frac{A}{2}$ an und verlängere die Schenkel bis an die Linie L.

41. Aufgabe. Gegeben a und h_b.

Conſtruction. Man conſtruire aus a, als Hypotenuſe,

Digitized by Google



und h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD, verlängere BD über D bis zum Schnittpunkte A mit dem auf der Mitte von BC = a errichteten Lothe und verbinde A mit C, so ist Δ ABC gleichschenklig und in demselben die Basis BC = a, die Höhe CD auf der Seite AB = h_b.

12. Aufgabe. Gegeben b und h_a.

Construction. (S. die vor. Figur.) Man errichte auf einer unbegränzten Geraden ein Loth EA = h_a, schneide aus A mit AB = b vorerwähnte Gerade in B; mache EC = EB und verbinde C mit A: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

13. Aufgabe. Gegeben b und h_b.

Construction. (Figur der 11. Aufgabe.) Man construire aus AC = b, als Hypotenuse, und CD = h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ACD; verlängere AD über D, bis AB = AC = b wird, und verbinde B mit C: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

14. Aufgabe. Gegeben h_a und B.

Construction. (Figur der 11. Aufg.) Man zeichne eine Gerade AE = h_a, trage an dieselbe im Punkte A nach beiden Seiten einen Winkel BAE = R − B an, und lege durch E lothrecht zu AE eine unbegrenzte Gerade, verlängere alsdann die Schenkel AB und AC der Winkel BAE und CAE bis zu den Schnittpunkten B und C mit der vorerwähnten unbegränzten Geraden: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

15. Aufgabe. Gegeben: Schenkel AB = AC = b, und die nach der Mitte des Schenkels b gehende Ecktransversale CD = t.

Construction. Man construire aus AC = b, $AD = \frac{b}{2}$ und CD = t ein Dreieck ACD; verlängere AD über D, bis AB = AC = b ist, und verbinde B mit C: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

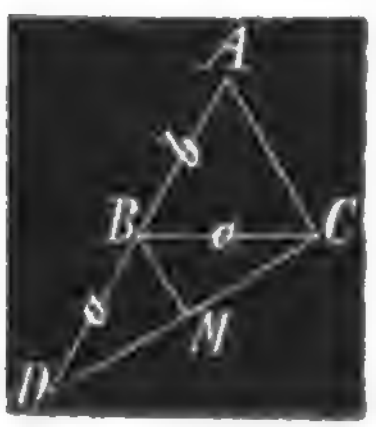
Digitized by Google

Determination. Die Conſtruction iſt unmöglich, wenn

$$t \begin{matrix} < \\ = \end{matrix} \frac{b}{2}$$

gegeben iſt.

16. Aufgabe. Gegeben $a + b = s$ und $\angle A$.



Analyſis. Iſt im Δ ABC die Baſis $BC = a$, der Schenkel $AB = AC = b$ und $\angle BAC = A$, ſo kann man AB über B verlängern, $BD = BC = a$ machen und D mit C verbinden, wodurch das Dreieck ACD entſteht, deſſen Seite $AD = a + b = s$ iſt. Im Δ ABC iſt aber $\angle ABC = R - \frac{1}{2} A$, mithin im Δ BCD Winkel $CDB = \frac{1}{2}(R - \frac{1}{2} A) = \frac{1}{2} R - \frac{1}{4} A$. Daher iſt Δ ACD aus einer Seite $AD = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $DAC = A$ und $CDA = \frac{1}{2} R - \frac{1}{4} A$ conſtruirbar. Hieraus ergiebt ſich zuletzt das geſuchte Dreieck ABC.

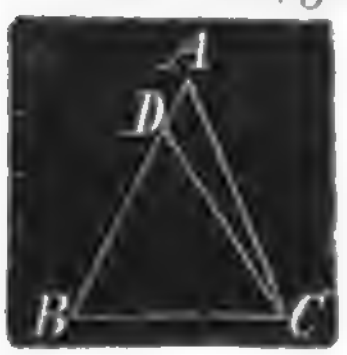
Conſtruction. Man trage an $AD = a + b = s$ in dem einen Endpunkte A einen Winkel $CAD = A$ und in dem andern Endpunkte D einen Winkel $CDA = \frac{1}{2} R - \frac{1}{4} A$ an; verlängere die Schenkel AC und DC bis zum Schnittpunkte C; errichte auf der Mitte von CD ein Loth MB bis an die Seite AD und verbinde B mit C: ſo iſt Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

Beweis. Δ BMD $\cong \Delta$ BMC, mithin $BD = BC$, alſo $AB + BC = AB + BD = AD = s$. Da ferner $\angle ADC = \frac{1}{2} R - \frac{1}{4} A$ iſt, ſo findet ſich $\angle ABC = R - \frac{1}{2} A$, alſo $\angle ACB = 2R - (A + R - \frac{1}{2} A) = 2R - (R + \frac{1}{2} A) = R - \frac{1}{2} A$, d. i. $\angle ACB = \angle ABC$, folglich Seite $AC = AB$.

17. Aufgabe. Gegeben $a + b = s$ und $\angle B$.

Conſtruction. (S. die vorige Figur.) Man conſtruire aus $AD = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $ADC = \frac{1}{2} B$ und $\angle DAC = 2(R - B)$ ein Dreieck ADC und leite hieraus in angegebener Weiſe Δ ABC her.

18. Aufgabe. Gegeben $b - a = d$ und $\angle A$.



Analyſis. Es ſei Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck, $AD = AB - BD = AB - BC = b - a = d$ und $\angle BAC = A$, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck DBC $\angle DBC = R - \frac{1}{2} A$ und der Baſiswinkel $BDC = BCD$

$= \frac{1}{2} R + \frac{1}{4} A$, folglich im Δ ACD $\angle$ ADC $= \frac{3}{2} R - \frac{1}{4} A$, und ist daher Δ ACD aus einer Seite AD $= d$ und den beiden anliegenden Winkeln DAC $= A$ und $\angle$ ADC $= \frac{3}{2} R - \frac{1}{4} A$ construirbar. Aus Δ ACD ergiebt sich aber das gleichschenklige Dreieck ABC.

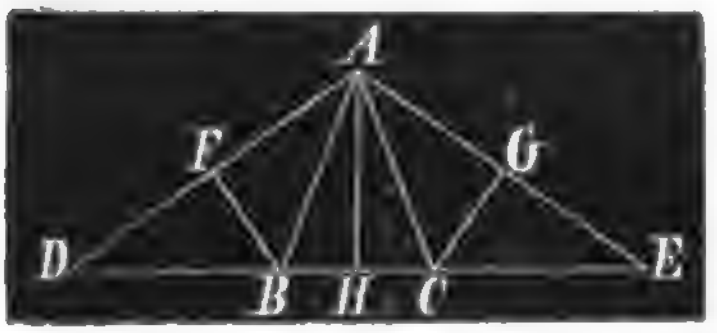
Construction. Man construire aus AD $= d$ und den beiden anliegenden Winkeln DAC $= A$ und ADC $= \frac{3}{2} R - \frac{1}{4} A$ ein Δ ACD; verlängere AD über D, bis AB $=$ AC ist; und verbinde B mit C: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis in der Analysis und Construction.

49. Aufgabe. Gegeben $b - a = d$ und $\angle B$.

Construction. (Fig. der 48. Aufgabe.) Man construire aus AD $= d$ und den beiden anliegenden Winkeln ADC $= R + \frac{B}{2}$ und DAC $= 2(R - B)$ ein Dreieck ADC; verlängere AD über D, bis AB $=$ AC ist; und verbinde B mit C, so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

50. Aufgabe. Gegeben der Umfang $= u$ und der Basiswinkel $= B$.



Analysis. Es sei Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck, $\angle$ ABC $=$ $\angle$ ACB $= B$. Wird BC auf beiden Seiten verlängert, BD $=$ BA und CE $=$ CA gemacht, wie auch A mit D und E verbunden, so findet sich in den gleichschenkligen Dreiecken BAD und CAE Winkel BDA $=$ CEA $= \frac{1}{2} B$, und ist daher Δ ADE construirbar aus der Basis DE $= u$ und den beiden anliegenden Winkeln. Die Spitzen B und C der gleichschenkligen Dreiecke BAD und CAE sind die Schnittpunkte der Linie DE $= u$ mit den auf der Mitte von AD und AE errichteten Perpendikeln BF und CG.

Construction. Man construire aus der Grundlinie DE $= u$ und dem Basiswinkel ADB $= \frac{B}{2}$ ein gleichschenkliges Dreieck ADE; halbire die Schenkel AD in F und AE in G; errichte in F und G Lothe bis zu den Punkten B und C in der DE

Digitized by Google

und verbinde B und C mit A: ſo iſt Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

Beweis. Δ BFD ≅ Δ BFA, daher BD = BA.
Δ CGE ≅ Δ CGA, daher CE = CA.

Mithin AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = u. Da ferner der Baſiswinkel der gleichſchenkligen Dreiecke BAD und CAE = $\frac{B}{2}$ gemacht worden, ſo muß der Außenwinkel an der Spitze dieſer Dreiecke, als das Doppelte hiervon, = B ſein; d. h. in dem gleichſchenkligen Dreieck ABC iſt der Baſiswinkel ABC = ACB = B.

51. Aufgabe. Gegeben der Umfang = u und der Winkel an der Spitze = A.

Conſtruction. (Fig. der vorigen Aufgabe.) Man conſtruire aus DE = u, als Baſis, und dem Baſiswinkel ADE = $\frac{R}{2} - \frac{A}{4}$ ein gleichſchenkliges Dreieck ADE, und leite in angegebener Weiſe hieraus das geſuchte gleichſchenklige Dreieck ABC her.

52. Aufgabe. Gegeben der Umfang = u und die auf der Baſis ſtehende Höhe AH = h_a.

Conſtruction. (Fig. der 50. Aufg.) Man errichte auf der Mitte einer Geraden DE = u ein Loth AH = h_a, verbinde A mit D und E, und verfahre ſodann, wie in Aufg. 49 angegeben worden: ſo iſt Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

53. Aufgabe. Gegeben a, ſo wie b + h_a = s.

Conſtruction. Man conſtruire aus BD = $\frac{a}{2}$ und DE = s, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck EBD; halbire EB in F und errichte daſelbſt ein Loth FA bis an die Kathete ED; verbinde A mit B, verlängere BD über D, mache DC = BD, und ziehe zuletzt AC: ſo iſt Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

Beweis. Δ AFE ≅ Δ AFB, daher AE = AB, alſo EA + AD = AB + AD = b + h_a = s.

Ferner: Δ ADB ≅ Δ ADC, mithin BD = DC = $\frac{a}{2}$, alſo BC = a, wie auch AB = AC, d. h. Δ ABC iſt gleichſchenklig.

Digitized by Google

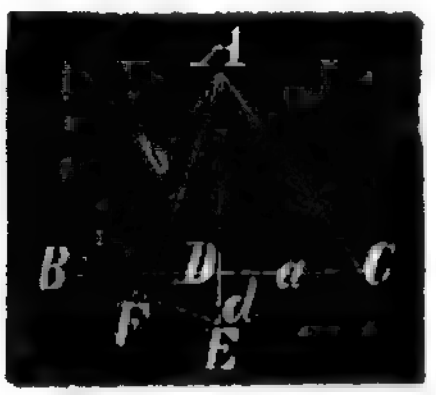
54. Aufgabe. Gegeben $b + h_a = s$ und $\angle A$.

Construction. (S. die vor. Figur.) Man construire aus $DE = s$ (als Kathete) und dem anliegenden spitzen Winkel $BED = \frac{A}{2}$ ein rechtwinkliges Dreieck EBD; halbire die Hypotenuse BE in F, und errichte daselbst ein Loth FA, von dem die Kathete DE in A geschnitten wird; verbinde A mit B; verlängere BD über D; mache $DC = BD$, und ziehe CA: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

55. Aufgabe. Gegeben $b + h_a = s$ und $\angle B$.

Construction. (Figur der 53. Aufgabe.) Man construire aus $DE = b + h_a = s$ (als Kathete) und dem anliegenden spitzen Winkel $BED = \frac{1}{2}(R - B)$ ein rechtwinkliges Dreieck BED, und verfahre sodann wie in Aufgabe 53.

56. Aufgabe. Gegeben $b - h_a = d$ und a.



Construction. Man construire aus den Katheten $DE = b - h_a = d$ und $BD = \frac{a}{2}$ ein rechtwinkliges Dreieck BDE; errichte auf der Mitte der Hypotenuse BE ein Loth FA bis zum Schnittpunkt A mit der Verlängerung der Kathete ED; verbinde A mit B; verlängere BD über D um eine Strecke $DC = BD = \frac{a}{2}$, so daß $BC = a$ wird, und ziehe zuletzt CA: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. $\Delta AFB \cong \Delta AFE$, daher $AB = AE$, und $AE - AD = AB - AD = b - h_a = DE = d$. Ferner $BC = a$ per constr., und $\Delta ABD \cong \Delta ACD$, also $AB = AC$, d. h. Δ ABC ist gleichschenklig.

57. Aufgabe. Gegeben $b - h_a = d$ und $\angle A$.

Construction. (S. die vor. Figur.) Man construire aus der Seite $DE = b - h_a = d$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $DEB = R - \frac{A}{4}$ ein rechtwinkliges Dreieck DEB; und verfahre sodann, wie in Aufg. 55 angegeben worden: so ist Δ ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Anmerkung. Daß $\angle DEB = R - \frac{A}{4}$ ist, leitet die Ana-

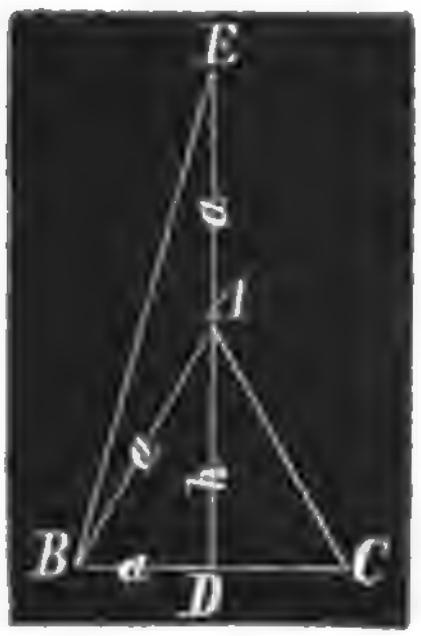
lyſis folgendermaßen her. Im Δ ABC wird ∠ BAC durch die Höhe AD halbirt, daher iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck ABE der Winkel an der Spitze, nämlich ∠ BAE, $= \frac{A}{2}$, alſo die Summe der Baſiswinkel $= 2R - \frac{A}{2}$, woraus folgt:

$$\angle ABE = \angle AEB = R - \frac{A}{4}.$$

58. Aufgabe. Gegeben $b - h_a = d$ und ∠ B.

Conſtruction. (Figur der 55. Aufgabe.) Da ∠ ABC = B gegeben, ſo iſt in dem geſuchten Dreieck ABC ∠ BAC = $2(R - B)$ und daher ∠ BAD $= R - B$, und demgemäß in dem gleichſchenkligen Dreieck ABE Baſiswinkel ABE + AEB $= 2R - (R - B) = R + B$, mithin ∠ AEB $= \frac{1}{2}(R + B)$. Man conſtruire alſo aus $DE = b - h_a = d$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $DEB = \frac{1}{2}(R + B)$ ein rechtwinkliges Dreieck DEB, aus welchem ſich (nach Aufg. 55) das geſuchte gleichſchenklige Dreieck ABC leicht ergiebt.

59. Aufgabe. Ein gleichſeitiges Dreieck ABC zu conſtruiren, von welchem die Summe der Seite und Höhe $a + h = s$ gegeben iſt.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck. Da $\angle BAC = \frac{2}{3}R$ iſt und durch die Höhe AD halbirt wird, ſo findet ſich $\angle BAD = \frac{1}{3}R$. Verlängert man nun AD über A um eine Strecke AE gleich der Seite AB, ſo iſt $DE = a + h = s$ und Δ ABE gleichſchenklig. Der Außenwinkel an der Spitze dieſes Dreiecks, nämlich $\angle BAD = \frac{1}{3}R$, iſt doppelt ſo groß als ein Baſiswinkel, woraus folgt: $\angle DEB = \frac{1}{6}R$, und iſt daher das rechtwinklige Dreieck DEB aus $DE = s$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $DEB = \frac{1}{6}R$ conſtruirbar. Aus Δ DEB ergiebt ſich aber leicht das geſuchte gleichſeitige Dreieck ABC.

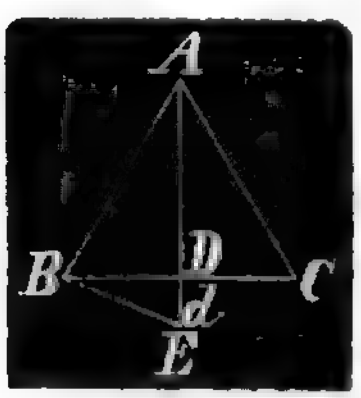
Conſtruction. Man conſtruire aus $DE = s$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $DEB = \frac{1}{6}R$ ein rechtwinkliges Dreieck DEB; mache die Verlängerung der Kathete BD (über D), nämlich die Strecke $DC = BD$, und ſchneide aus

Digitized by Google

den Endpunkten der BC mit einer Geraden = BC die DE in A; und verbinde zuletzt A mit B und C: so ist Δ ABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Die ED steht senkrecht auf der Mitte der BC; daher liegt der Schnittpunkt der Seiten AB und AC in der Linie DE. Es ist also per constr. Δ ABC gleichseitig und ∠ ABC = $\frac{2}{3}$ R. In dem rechtwinkligen Dreieck DEB ist ∠ DEB = $\frac{1}{6}$ R gemacht worden, daher muß ∠ EBD = $\frac{5}{6}$ R sein. Wird hiervon ∠ ABC = $\frac{2}{3}$ R abgezogen, so ergiebt sich ∠ EBA = $\frac{1}{6}$ R, also ∠ AEB = ∠ EBA, woraus erhellt AE = AB und DE = AE + AD = AB + AD = a + h = s.

60. Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck ABC zu construiren, von welchem die Differenz der Seite und Höhe a — h = d gegeben ist.



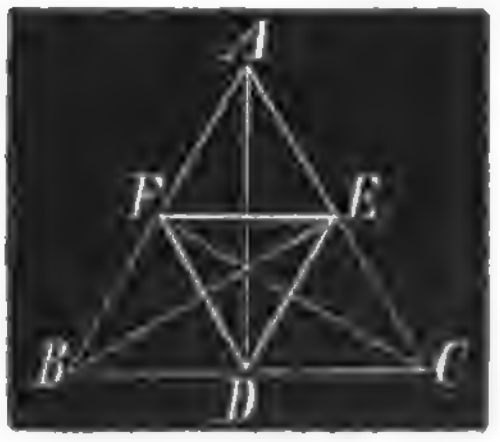
Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, DE = AE — AD = AB — AD = a — h = d. Da ∠ BAC = $\frac{2}{3}$ R, mithin ∠ BAE = $\frac{1}{3}$ R ist, so findet sich in dem gleichschenkligen Dreieck ABE Basiswinkel AEB = $\frac{5}{6}$ R, und ist daher das rechtwinklige Dreieck DEB aus DE = d, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel DEB = $\frac{5}{6}$ R construirbar. Aus diesem Dreieck ergiebt sich aber das gesuchte gleichseitige Dreieck ABC.

Construction. Man construire aus DE = d, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel DEB = $\frac{5}{6}$ R ein rechtwinkliges Dreieck DEB; verlängere BD über D und mache DC = BD; schneide aus den Endpunkten der BC mit einer Geraden = BC die Verlängerung der ED im Punkte A, und verbinde A mit B und C: so ist Δ ABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Beweis. AD steht senkrecht auf der Mitte von BC, daher fällt der Schnittpunkt A der Linien BA und CA in die Verlängerung der ED. Es ist also per constr. ABC ein gleichseitiges Dreieck, und ∠ ABC = $\frac{2}{3}$ R. In dem rechtwinkligen Dreieck DEB ist per constr. ∠ DEB = $\frac{5}{6}$ R, mithin ∠ DBE = $\frac{1}{6}$ R, folglich ∠ ABC + ∠ DBE = ∠ ABE = $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$ R, d. i. ∠ ABE = ∠ AEB, woraus folgt: AB = AE und AE — AD = AB — AD = a — h = DE = d.

Digitized by Google

61. Aufgabe. Ein gleichſeitiges Deeieck ABC zu conſtruiren, von welchem die Fußpunkte D, E und F der drei Höhen gegeben ſind.



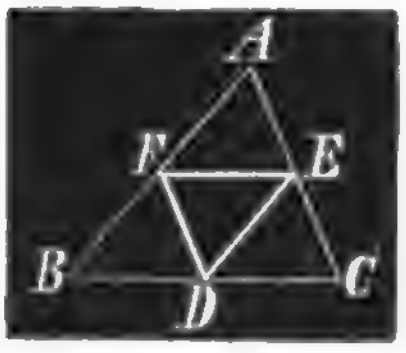
Analyſis und Conſtruction. Die Verbindungslinien der drei Fußpunkte D, E und F ſchließen ein gleichſeitiges Dreieck DEF ein. Legt man durch jeden Eckpunkt dieſes Dreiecks eine unbegränzte Gerade, die zu der gegenüberſtehenden Seite parallel iſt, ſo ergiebt ſich das geſuchte gleichſeitige Dreieck ABC.

62. Aufgabe. Ein gleichſchenkliges Dreieck ABC zu conſtruiren, von welchem die Fußpunkte D, E und F der drei Höhen gegeben ſind.

Conſtruction. Man verbinde die gegebenen Punkte D, E und F durch gerade Linien, wodurch ſich Δ DEF ergiebt; lege durch den Punkt D parallel zu FE eine unbegränzte Gerade (BC); halbire jeden der Winkel DFE und FED und verlängere die Halbirungslinien FC und EB bis zu den Schnittpunkten C und B mit der durch D gehenden Geraden, wodurch ſich die Baſis BC des geſuchten Dreiecks ABC ergiebt; verbinde B mit F, wie auch C mit E, und verlängere die Linien BF und CE bis zum Schnittpunkt A: ſo iſt Δ ABC das geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

Anmerkung. Die Höhen eines Dreiecks halbiren die Winkel des Dreiecks ihrer Fußpunkte (d. i. die Winkel des Höhendreiecks).

63. Aufgabe. Ein Dreieck ABC zu conſtruiren, von welchem die Halbirungspunkte der Seiten gegeben ſind.

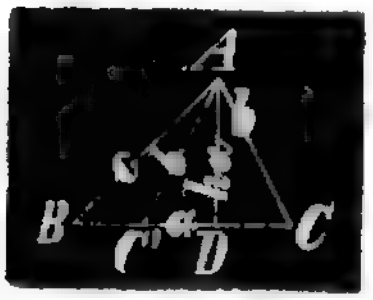


Conſtruction. Man conſtruire durch Verbindung der gegebenen Halbirungspunkte D, E und F das Mittendreieck DEF, und ziehe durch jeden Eckpunkt desſelben eine unbegränzte Parallele zu der gegenüberſtehenden Seite: ſo ergiebt ſich das geſuchte Dreieck ABC.

Digitized by Google

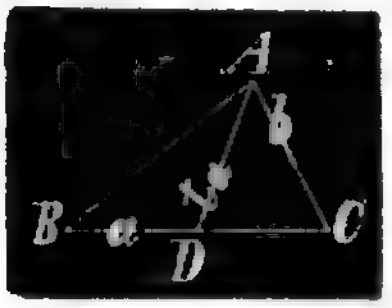
4. Construction der Dreiecke.

64. Aufgabe. Gegeben $AC = b$, $AB = c$, $AD = h_a$.



Construction. Man errichte auf einer unbegränzten Geraden ein Loth $AD = h_a$; schneide aus dem Punkte A mit $AB = c$ und $AC = b$ die vorerwähnte unbegränzte Gerade, und zwar entweder nach verschiedenen Seiten oder auf einerlei Seite der gegebenen Höhe h_a, wodurch sich die Schnittpunkte B und C, resp. B und C' ergeben; und verbinde alsdann diese Punkte mit A: so entspricht jedes der beiden Dreiecke ABC und ABC' den Bedingungen der Aufgabe.

65. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AC = b$ und die Schwerpunkts-Transversale $AD = t_a$.

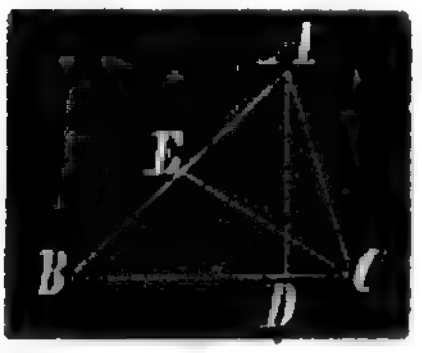


Construction. Man construire aus $CD = \frac{a}{2}$, $AC = b$ und $AD = t_a$ ein ΔACD; verlängere CD über D, bis $DB = CD$ wird; und verbinde B mit A: so ist ΔABC das gesuchte.

66. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $\angle ABC = B$ und die nach a gehende Schwerpunkts-Transversale $= t_a$.

Construction. (S. die vorige Figur.) Man construire einen Winkel $ABC = B$, mache den einen Schenkel $BC = a$, halbire letzteren in D und schneide aus D mit $AD = t_a$ den andern Schenkel in A, verbinde zuletzt A mit C: so ist ΔABC das gesuchte.

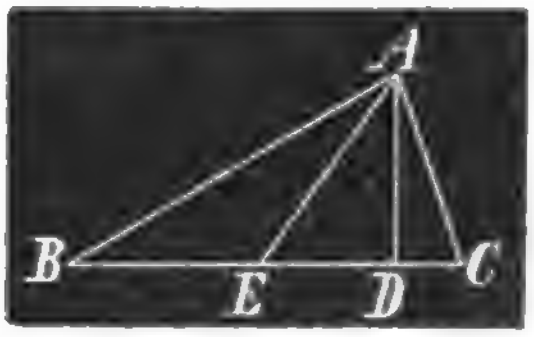
67. Aufgabe. Gegeben $AD = h_a$, die Ecktransversale $CE = t_c$ und $\angle ABC = B$.



Construction. Man construire aus $AD = h_a$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $BAD = R - B$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD; schneide aus dem Halbirungspunkte E der Hypotenuse AB mit $CE = t_c$ die Verlängerung der BD in C, und verbinde zuletzt C mit A: so ist ΔABC das gesuchte.

68. Aufgabe. Gegeben $AC = b$, $AD = h_a$ und die Schwerpunkts-Transversale $AE = t_a$.

Digitized by Google



Conſtruction. Man conſtruire aus $AC = b$, als Hypotenuſe, und $AD = h_a$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ACD; verlängere CD über D; ſchneide aus dem Punkte A mit $AE = t_a$ die Verlängerung von CD im Punkte E; mache $EB = EC$ und verbinde B mit A: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Determination. Ein anderes Dreieck, das ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe entſpricht, ergiebt ſich, wenn man DC über C verlängert und den in dieſer Verlängerung liegenden Schnittpunkt E berückſichtigt.

69. Aufgabe. Gegeben $\angle BAC = A$, $\angle ABC = B$, Höhe $AD = h_a$.

Conſtruction. (S. die vorige Figur.) Man conſtruire aus $AD = h_a$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $BAD = R - B$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD; verlängere BD über D, trage an AD in A einen Winkel $DAC = A - (R - B) = A + B - R$ an, und verlängere den Schenkel AC bis an die Richtung BD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

70. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AD = h_a$, $\angle ABC = B$.

Conſtruction. (Fig. der 68. Aufgabe.) Man conſtruire aus $AD = h_a$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $BAD = R - B$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD; verlängere BD über D, bis $BC = a$ wird; und verbinde C mit A: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

71. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AD = h_a$, $AC = b$.

Conſtruction. (Fig. der 68. Aufgabe.) Man conſtruire aus $AD = h_a$, als Kathete, und $AC = b$, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck ACD; verlängere CD über D, bis $BC = a$ wird, und verbinde B mit A: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Determination. Den Bedingungen der Aufgabe entſpricht auch dasjenige ſtumpfwinklige Dreieck, welches entſteht, wenn man DC über C verlängert, und die Verlängerung $= a$ macht.

72. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $\angle ABC = B$ und die Schwerpunkts-Transverſale $CE = t_c$.

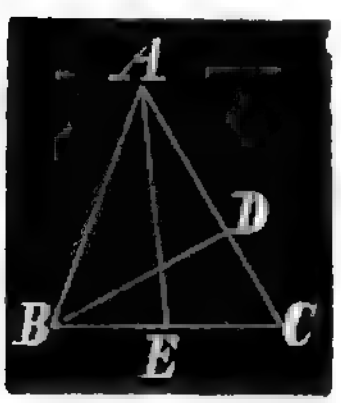
Digitized by Google

Construction. (Fig. der 67. Aufgabe.) Man construire aus den beiden Seiten $BC = a$ und $CE = t_c$, so wie dem der Seite BC anliegenden Winkel $ABC = B$ ein Dreieck EBC; verlängere BE über E, bis $EA = BE$ wird; und verbinde A mit C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

73. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AD = h_a$ und $AE = t_a$.

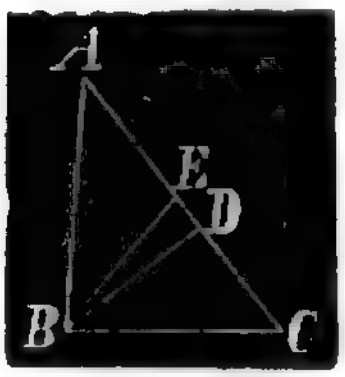
Construction. (Fig. der 68. Aufgabe.) Man construire aus $AD = h_a$, als Kathete, und $AE = t_a$, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck ADE; verlängere DE auf beiden Seiten, bis $EB = EC = \frac{a}{2}$ wird; und verbinde B und C mit A: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

74. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $BD = h_b$, $AE = t_a$.



Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $BD = h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD: halbire BC in E; schlage aus E mit dem Radius $EA = t_a$ einen Kreisbogen, der die Verlängerung der CD in A schneidet; und verbinde A mit B: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

75. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $BD = h_b$, $BE = t_b$.

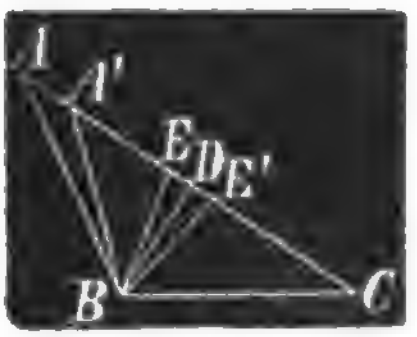


Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $BD = h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere CD über D; schlage aus B mit $BE = t_b$ einen Kreisbogen, der die Verlängerung der CD in E schneidet; mache $EA = EC$; und verbinde A mit B: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Der Punkt E kann aber auch zwischen D und C liegen; und hat man daher, um ein zweites Dreieck zu erhalten, das ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe entspricht, DC über C zu verlängern, und im Übrigen in der bereits angegebenen Weise zu verfahren, bis sich der Eckpunkt A dieses zweiten Dreiecks in der Verlängerung von DC über C hinaus ergiebt.

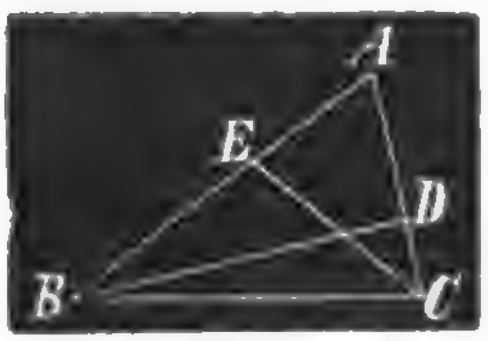
76. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $BD = h_b$ und (die bis zur AC gehende Halbirungslinie des Winkels ABC) $BE = m_b$.

Digitized by Google



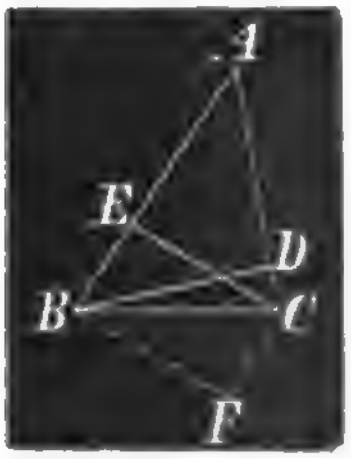
Conſtruction. Man conſtruire aus BC = a, als Hypotenuſe, und BD = h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere CD über D; ſchneide aus B mit BE = m_b die CD oder deren Verlängerung in zwei Punkten E und E'; mache ∠ ABC (reſp. ∠ A'BC) = ∠ CBE (reſp. ∠ CBE'), und verlängere die Schenkel BA und BA' bis zur Verlängerung der CD: ſo entſpricht jedes der beiden Dreiecke ABC und A'BC den Bedingungen der Aufgabe.

77. Aufgabe. Gegeben BC = a, BD = h_b und CE = m_c als Halbirungslinie des Winkels ACB.



Conſtruction. Man conſtruire aus BC = a, als Hypotenuſe, und BD = h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; halbire den Winkel BCD; mache die Halbirungslinie CE = m_c; verlängere CD über D; und lege durch die Punkte B und E eine Gerade BA, von der die Verlängerung der CD in A geſchnitten wird: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

78. Aufgabe. Gegeben ∠ BAC = A; BD = h_b und CE = h_c.



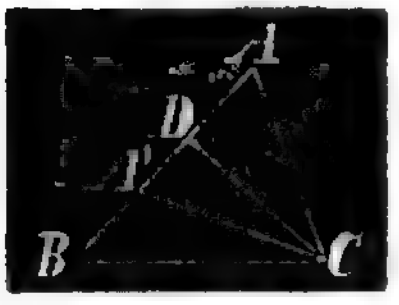
Conſtruction. Man conſtruire aus BD = h_b, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel ABD = R — A ein rechtwinkliges Dreieck ABD; verlängere AD über D; errichte auf AB in einem beliebigen Punkte B ein Loth BF = CE = h_c; ziehe FC ∥ BA bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung der Kathete AD; und verbinde C mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

79. Aufgabe. Gegeben BC = a, AC = b; BE = t_b (als Schwerpunkts-Transverſale nach dem Halbirungspunkte von AC).

Conſtruction. (Fig. der 75. Aufgabe.) Man conſtruire aus BC = a; CE = $\frac{b}{2}$ und BE = t_b ein Δ BEC; verlängere CE über E, bis EA = EC wird; und verbinde A mit B: ſo iſt Δ ABC das geſuchte.

Digitized by Google

80. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AC = b$; $CD = h_c$.

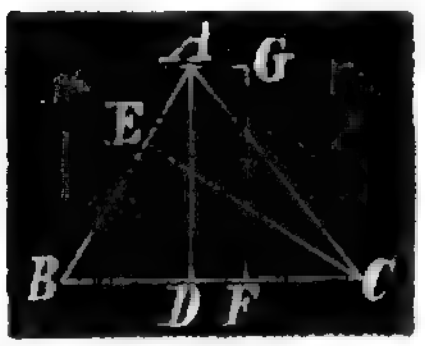


Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $CD = h_c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD über D; und schlage aus C mit $AC = b$ einen Kreisbogen, der die Richtung BD in A (resp. A') schneidet; und verbinde A (resp. A',) mit C: so ist ABC (resp. A'BC) das gesuchte Dreieck.

81. Aufgabe. Gegeben $BC + AC = s$, $BC - AC = d$, $\angle BAC = A$

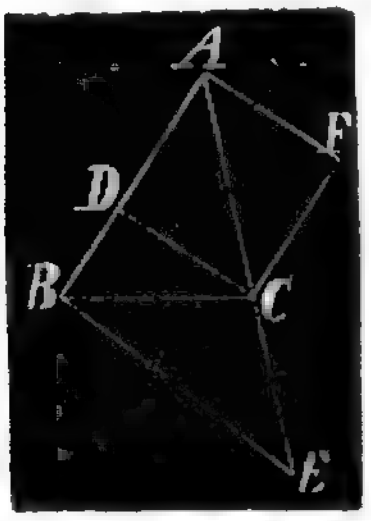
Construction. Da $BC = \frac{1}{2}(s + d)$ und $AC = \frac{1}{2}(s - d)$ ist, so läßt sich ΔABC aus den Seiten BC und AC und dem der größeren Seite BC gegenüberliegenden Winkel $BAC = A$ sofort construiren.

82. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AD = h_a$, $CE = h_c$.



Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $CE = h_c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCE; verlängere BE über E; errichte auf BC in einem beliebigem Punkte F ein Loth $FG = AD = h_a$; lege durch G eine Gerade GA $\parallel$ BC bis zum Schnittpunkt A mit der Verlängerung von BE; und verbinde zuletzt A mit C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

83. Aufgabe. Gegeben $BC + AC = s$, $CD = h_c$, $\angle BAC = A$.



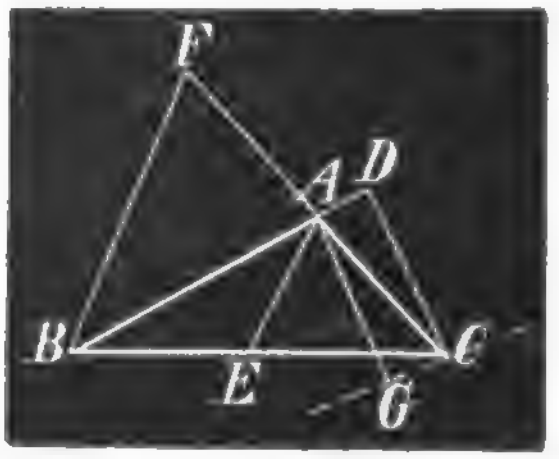
Construction. Man zeichne einen Winkel $BAC = A$; mache den einen Schenkel $AE = BC + AC = s$; errichte auf dem andern Schenkel in einem beliebigen Punkte A ein Loth $AF = CD = h_c$; lege durch F eine Gerade $FC \parallel AB$ bis zum Schnittpunkt C mit dem Schenkel AE; schneide aus C mit $CB = CE$ den Schenkel AB oder dessen Verlängerung in dem Punkte B; und verbinde B mit C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

84. Aufgabe. Gegeben $BC - AC = d$; $CD = h_c$; $\angle BAC = A$.

Construction. Man zeichne einen Winkel $BAC = A$; er-

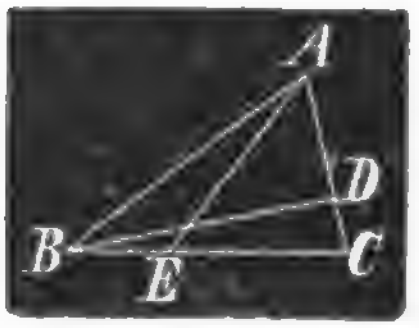
Digitized by Google

richte auf dem Schenkel AB in einem beliebigem Punkte A ein



Loth $AG = CD = h_c$; lege durch G eine Gerade GC || BA bis zum Schnittpunkt C mit dem Schenkel AC; verlängere AC über A um eine Strecke $AF = d$ (d. i. $BC - AC = BC - EC = BE$ in dem geſuchten Dreieck ABC); ſchneide aus C mit $CA + AF = CF$ den unbegränzten Schenkel AB im Punkte B; und verbinde zuletzt B mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

85. Aufgabe. Gegeben $BC - AC = d$; $BD = h_b$; $\angle ACB = C$.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $BC - AC = BC - CE = BE = d$, $BD = h_b$ und $\angle ACB = C$. Da $BD = h_b$ und $\angle ACB$ (reſp. $DCB = C$ gegeben iſt, ſo läßt ſich zunächſt das rechtwinklige Dreieck BDC conſtruiren. Wird auf der Hypotenuſe BC dieſes Dreiecks von dem Punkte C aus eine Strecke $CE = CA$ abgeſchnitten, ſo ergiebt ſich $BE = d$ und, durch Verbindung des Punktes E mit A, ein gleichſchenkliges Dreieck CAE, in welchem der Winkel an der Spitze, nämlich $\angle ACE = C$ iſt. Hiermit iſt auch der dritte Eckpunkt A des ΔABC beſtimmt.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BD = h_b$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $DBC = R - C$ ein rechtwinkliges Dreieck BDC; ſchneide auf der Hypotenuſe BC von dem Punkte B aus eine Strecke $BE = d$ ab; verlängere CD über D, bis $CA = CE$ wird; und verbinde A mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. $BD = h_b$ per constr. und ſenkrecht auf AC; daher iſt BD die vorgeſchriebene Höhe auf AC. Auch iſt $\angle ABC = C$ gemacht worden. Ferner findet ſich $CA = CE$, mithin $BC - AC = BC - EC = BE = d$.

86. Aufgabe. Gegeben $BD = h_b$, $\angle BAC = A$ und die Differenz der beiden andern Winkel $= \delta$.

Conſtruction 1. (S. die vor. Fig.) Zunächſt findet ſich

$$\angle ABC = \left(R - \frac{A}{2}\right) - \frac{\delta}{2}$$

$$\text{und } \angle ACB = \left(R - \frac{A}{2}\right) + \frac{\delta}{2},$$

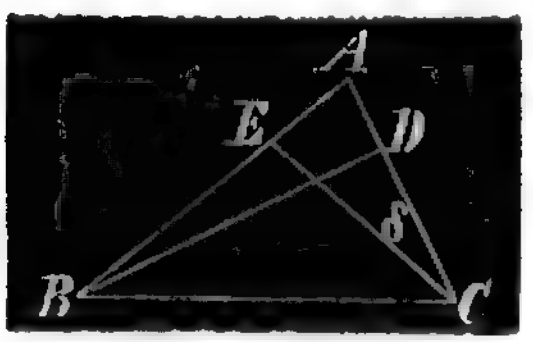
so wie auch

$$\angle ABD = R - A$$

$$\text{und } \angle DBC = R - \angle ACB = \tfrac{1}{2}(A - \delta.)$$

Man zeichne daher eine unbegränzte Gerade AC; errichte in einem beliebigen Punkte derselben ein Loth $DB = h_b$; trage an BD im Punkte B auf der einen Seite $\angle ABD = R - A$, auf der andern Seite $\angle DBC = \tfrac{1}{2}(A - \delta)$ an; und verlängere die Schenkel BA und BC bis an die unbegränzte Gerade AC: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Construction 2. In dem rechtwinkligen Dreieck ABD ist die Kathete $BD = h_b$, der gegenüberliegende Winkel $BAD = A$, mithin der anliegende spitze Winkel $ABD = R - A$ gegeben. Demgemäß ist ΔABD construirbar.



Wird nun angenommen, daß ABC das gesuchte Dreieck sei, und $\angle ACB - \angle ABC = \delta$, so kann $\angle ACB$ um $\angle ACE = \delta$ vermindert werden, wodurch sich ergiebt: $\angle ECB = \angle EBC$, und daher $EC = EB$, d. h. ΔEBC ist gleichschenklig. Der Außenwinkel AEC an der Spitze dieses Dreiecks beträgt $2R - (A + \delta)$, demnach ist der Basiswinkel $EBC = R - \tfrac{1}{2}(A + \delta) = \left(R - \frac{A}{2}\right) - \frac{\delta}{2}$, während in dem rechtwinkligen Dreieck ABD der Winkel $ABD = R - A$ ist. Hieraus findet sich $\angle DBC = \left(R - \frac{A}{2} - \frac{\delta}{2}\right) - (R - A) = \tfrac{1}{2}(A - \delta)$.

Man construire also aus $BD = h_b$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $ABD = R - A$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD; verlängere AD über D; trage an BD im Punkte B einen Winkel $DBC = \tfrac{1}{2}(A - \delta)$ an, so daß $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC = R - \tfrac{1}{2}(A + \delta)$ wird; und verlängere den Schenkel BC bis zum Schnittpunkt C mit der Verlängerung von AD: so ist ΔABC das gesuchte Dreieck.

Digitized by Google

87. Aufgabe. Gegeben $CD = h_c$; $\angle BAC = A$; $\angle ABC = B$.

Conſtruction. (Figur der 80. Aufg.) Man mache $CD = h_c$ zur gemeinſamen Kathete zweier rechtwinkligen Dreiecke DCA und DCB, in denen die der genannten Kathete anliegenden ſpitzen Winkel $ACD = R - A$ und $BCD = R - B$ ſind: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

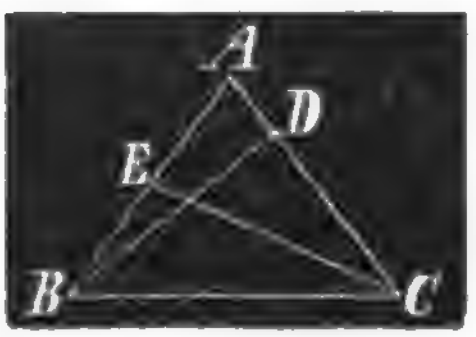
88. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $BD = h_b$, $\angle ABC = B$.

Conſtruction. (Figur der 85. Aufg.) Man conſtruire aus $BC = a$, als Hypotenuſe, und $BD = h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD, wodurch ſich $\angle CBD$ ergiebt; vergrößere letzteren um $\angle ABD$, ſo daß $\angle CBD + \angle ABD = \angle ABC = B$ wird; verlängere AD über D, wie auch den Schenkel BC bis zum Schnittpunkt C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

89. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $BD = h_b$, $\angle BAC = A$.

Conſtruction. (Fig. der 85. Aufg.) Man conſtruire aus $BC = a$, als Hypotenuſe, und $BD = h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere CD über D; trage an BD im Punkte B einen Winkel $ABD = R - A$ an; und verlängere den Schenkel BA bis zum Schnittpunkt A mit der Verlängerung von CD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

90. Aufgabe. Gegeben $BD = h_b$, $CE = t_c$ (Ecktransverſale zur Mitte der AB) und $\angle BAC = A$.

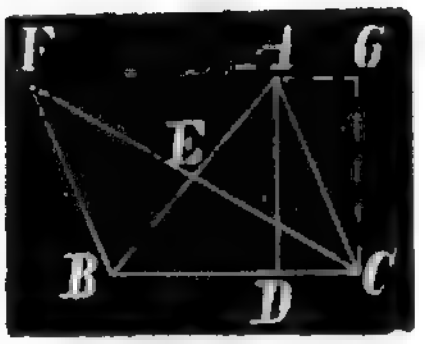


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck. Da $BD = h_b$ und $\angle BAC = A$, mithin $\angle ABD = R - A$ gegeben iſt, ſo läßt ſich das rechtwinklige Dreieck ABD conſtruiren. Die Hypotenuſe AB dieſes Dreiecks wird durch die Transverſale $CE = t_c$ halbirt; daher iſt auch Δ AEC (aus zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden $\angle A$) conſtruirbar.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BD = h_b$, als Hypotenuſe, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $ABD = R - A$ ein rechtwinkliges Dreieck ABD; halbire AB in E; ſchneide aus E mit $EC = t_c$ die Verlängerung von AD im Punkte C; und verbinde C mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

91. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $AD = h_c$, $CE = t_c$.

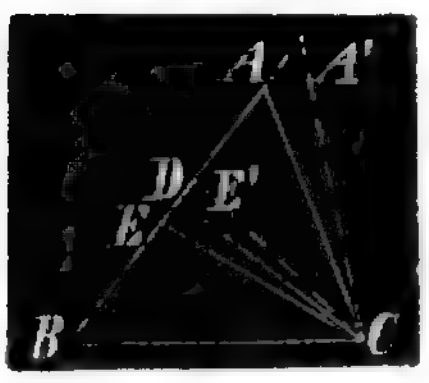
Digitized by Google



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, $BC = a$ und $CE = t_c$. Wird CE über E verlängert und $EF = CE$ gemacht, sodann F mit A verbunden: so ist ΔBCF gleichschenklig, nämlich $BF = BC = a$. Die Linie BE halbirt den Winkel CBF an der Spitze dieses Dreiecks, so daß sich $\angle EBF = \angle EBC$ findet. Aus dem $\angle EBC$ und der gegenüberstehenden Kathete $AD = h_c$ läßt sich aber das rechtwinklige Dreieck ABD construiren, so daß nun auch der dritte Eckpunkt des Dreiecks ABC gefunden ist.

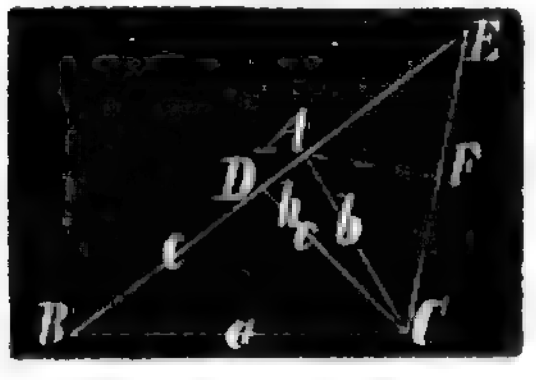
Construction. Man construire aus $CF = 2.t_c$, als Basis, und $BC = BF = a$, als Schenkel, ein gleichschenkliges Dreieck BCF; halbire die Basis in E; verbinde B mit E; verlängere BE über E; errichte auf BC in einem beliebigen Punkte C ein Loth $CG = DA = h_c$; lege durch G eine Gerade $GA \parallel CB$ bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung von BE; und verbinde A mit B und C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

92. Aufgabe. Gegeben $BC = a$, $CD = h_c$, $CE = t_c$.



Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $CD = h_c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; schneide aus C mit $CE = t_c$ die Kathete BD (resp. die Verlängerung derselben) in dem Punkte E (resp. E'); mache $EA = EB$ (resp. $E'A' = E'B$); und verbinde A (resp. A') mit B und C: so ist ABC (resp. A'BC) das gesuchte Dreieck.

93. Aufgabe. Gegeben a; $b + c = s$; h_c.

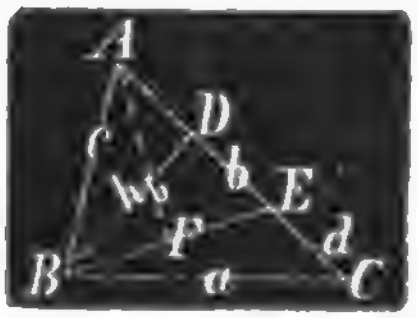


Construction. Man construire aus $BC = a$, als Hypotenuse, und $CD = h_c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD über D, bis $BE = b + c = s$ wird, verbinde E mit C; halbire CE in F; errichte in F ein Loth FA bis zum Schnittpunkt A mit der BE; und verbinde zuletzt A mit C: so ist ΔABC das gesuchte Dreieck und $AB + AC = AB + AE = BE = b + c = s$.

94. Aufgabe. Gegeben a; $b - c = d$; h_b.

Analysis. Es sei im ΔABC Seite $BC = a$, Höhe BD

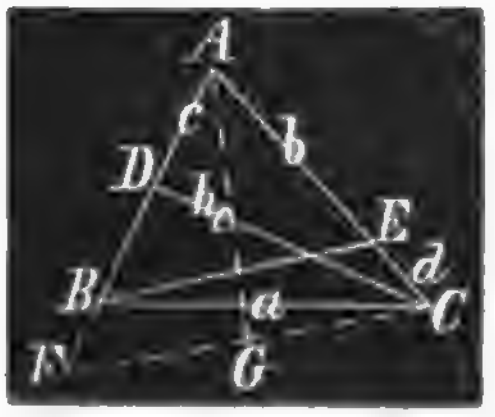
Digitized by Google



$= h_b$; Strecke $CE = AC - AE = AC - AB = b - c = d$; ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD beſtimmt. Wird nun auf AC aus dem Punkte C eine Strecke $CE = d$ abgeſchnitten, und E mit B verbunden, ſo entſteht das gleichſchenklige Dreieck ABC, deſſen Spitze A im Durchſchnitt des auf der Mitte der Baſis BE errichteten Lothes FA mit der Verlängerung von CD liegt. Hiermit iſt aber Δ ABC gefunden.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BC = a$, als Hypotenuſe, und $BD = h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; ſchneide auf CD, von C aus, $CE = d$ ab; verbinde E mit B; halbire EB in F; errichte in F ein Loth FA, durch das die Verlängerung von CD in A geſchnitten wird; und verbinde A mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

95. Aufgabe. Gegeben a; $b - c = d$; h_c.



Analyſis. Es ſei im Δ ABC Seite $BC = a$, Höhe $CD = h_c$ und $AC - AB = AC - AE = CE = BF = d$, ſo ergeben ſich als Hülfsdreiecke:

das rechtwinklige Dreieck BCD (aus a und h_c) und

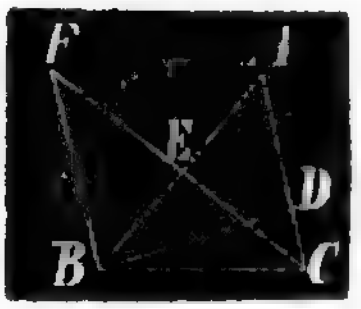
das gleichſchenklige Dreieck AFC (auf der Baſis FC).

Conſtruction. Man conſtruire aus $BC = a$, als Hypotenuſe, und $CD = h_c$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD nach beiden Seiten; mache $BF = d$; verbinde F mit C; halbire FC; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GA, von welchem die Verlängerung der Kathete BD (über D) im Punkte A geſchnitten wird — oder trage an FC im Punkte C einen $\angle ACF = DFC$ an, und verlängere den Schenkel CA bis zum Schnittpunkt A mit der Verlängerung von FD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Per constr. iſt $BC = a$; Höhe $CD = h_c$. Da ferner $AB + BF = AF = AC$, ſo wie $BF = CE = d$ iſt, ſo findet ſich $AB = AE$; mithin $AC - AB = AC - AE = CE = d$.

96. Aufgabe. Gegeben a, h_b, t_c.

Digitized by Google

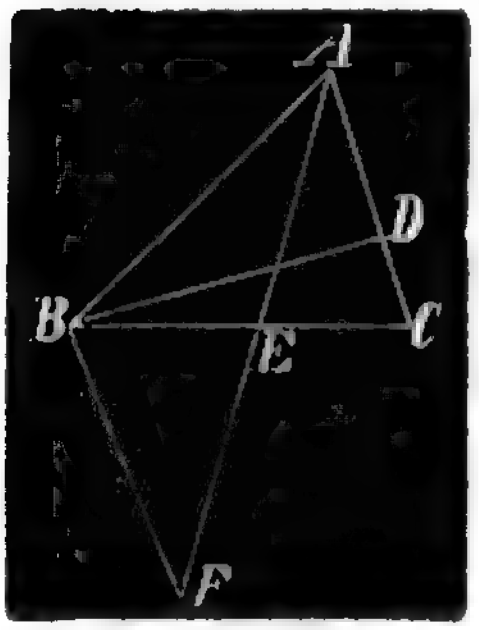


Analyſis. Es ſei im Δ ABC Seite BC = a, Höhe BD = h_b und die Schwerpunkts-Transverſale CE (nach der Mitte von AB) = t_c, ſo iſt zunächſt das rechtwinklige Dreieck BCD beſtimmt. Wird nun die Transverſale CE über E um ſich ſelbſt verlängert, d. h. EF = CE = t_c gemacht, und F mit B verbunden: ſo iſt Δ EFB ≅ Δ ECA, und daher ∠ BFE = ∠ ACE, alſo BF ‖ CA, womit die Conſtruction gefunden iſt.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = a, als Hypotenuſe, und BD = h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD, ſchlage aus C mit CF = 2.CE = 2.t_c einen Kreisbogen, ziehe aus B bis zum Schnittpunkte F mit dieſem Bogen eine Linie BF ‖ CA; verbinde F mit C; halbire CF in E, und lege durch die Punkte B und E eine Gerade BA bis an die Verlängerung der Kathete CD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Der Beweis iſt in der Analyſis und Conſtruction enthalten.

97. Aufgabe. Gegeben h_b, t_a, ∠ A.



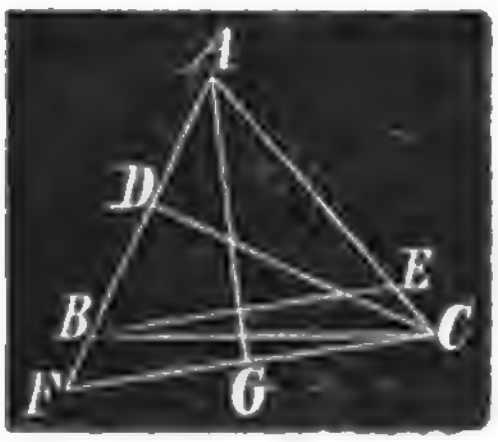
Analyſis. Es ſei im Δ ABC Höhe BD = h_b, Transverſale AE = t_a, ∠ BAC = A: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck ABD conſtruirbar. Ferner iſt BE = EC. Wird nun die Transverſale AE über E um ſich ſelbſt verlängert, daß AF = 2.AE = 2.t_a iſt, und alsdann F mit B verbunden, ſo ergiebt ſich Δ FBE ≅ Δ ACE, und daher ∠ EFB = EAC, alſo FB ‖ CA, womit Δ ABF beſtimmt iſt. Hieraus ergiebt ſich aber Punkt E, durch den die Transverſale AE = t_a und die Seite BC des geſuchten Dreiecks ABC gehen.

Conſtruction. Man conſtruire aus BD = h_b, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel ABD = R — A ein rechtwinkliges Dreieck ABD; verlängere AD über D; ziehe aus dem Punkte B eine unbegränzte Gerade BF ‖ AC; ſchneide aus dem Punkte A mit AF = 2.t_a die Gerade BF in F; verbinde A mit F; halbire AF in E, und lege durch die Punkte B und E eine Gerade BC bis an die Verlängerung der AD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Digitized by Google

Beweis in der Analyſis und Conſtruction enthalten.

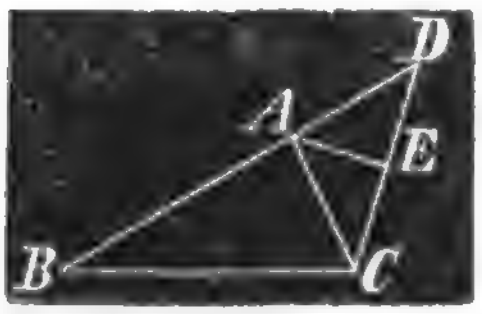
98. Aufgabe. Gegeben $b - c = d$; h_c; $\angle B$.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $AC - AB = b - c = CE = d$, die Höhe $CD = h_c$ und $\angle ABC = B$: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD beſtimmt. Wird nun B mit E verbunden, ſo iſt im Δ ABE Seite $AB = AE$, alſo Δ ABE gleichſchenklig. Ein zweites gleichſchenkliges Dreieck AFC ergiebt ſich, wenn man AB über B verlängert, $BF = EC = d$ macht, und F mit C verbindet. Die Spitze A des gleichſchenkligen Dreiecks AFC liegt ſenkrecht über der Mitte G der Baſis FC. Hiermit iſt die Conſtruction gefunden.

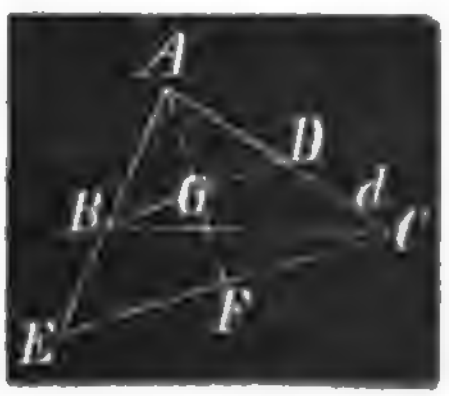
Conſtruction. Man conſtruire aus $CD = h_c$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $BCD = R - B$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD auf beiden Seiten; mache $BF = d$; verbinde F mit C; halbire FC; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GA bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung von BD; verbinde A mit C, und ziehe BE $\parallel$ FC: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck, $AE = AB$ und daher $AC - AB = AC - AE = CE = d$.

99. Aufgabe. Gegeben $b + c = s$; A, C.



Conſtruction. Man conſtruire aus der Seite $BD = b + c = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $BDC = \frac{1}{2}A$ und $DBC = 2R - (A + C)$ ein Δ BCD; halbire CD; errichte im Halbirungspunkte E ein Loth EA bis zum Schnittpunkte A mit der Seite BD; und verbinde A mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck, nämlich $AB + AC = BD = s$, $\angle BAC = A$ und $\angle ACB = C$.

100. Aufgabe. Gegeben $b - c = d$; A; B.



Analyſis. Iſt ABC das geſuchte Dreieck, $AD = AB$, mithin $AC - AB = AC - AD = CD = d$: ſo findet ſich in dem gleichſchenkligen Dreieck ABD Winkel $BAD = A$ und $\angle ADB = R - \frac{1}{2}A$. Demgemäß iſt $\angle BDC = R + \frac{1}{2}A$, während $\angle BCD$

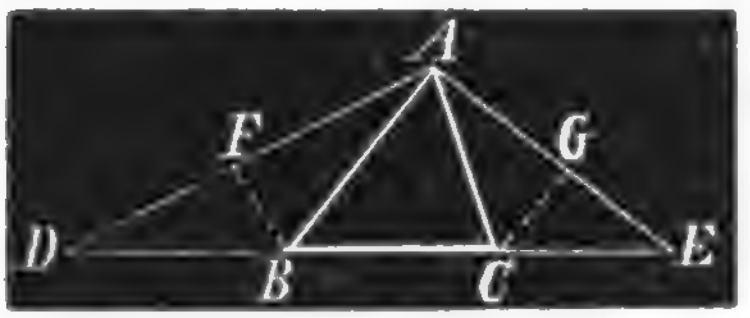
Digitized by Google

$= 2R - (A + B)$ ſein muß. Dieſe beiden Winkel liegen an der gegebenen Seite $CD = d$, und iſt daher ΔBCD conſtruirbar. Wird nun in dem geſuchten Dreieck ABC die kleinere Seite AB über B verlängert und $BE = DC = d$ gemacht, ſo iſt $AE = AC$, und — nachdem EC gezogen — ΔAEC gleichſchenklig. Die Spitze A der beiden gleichſchenkligen Dreiecke liegt ſenkrecht über dem Halbirungspunkte F der Linie EC. Hiermit iſt die Conſtruction gefunden.

Conſtruction 1. Man conſtruire aus $CD = d$ und den beiden anliegenden Winkeln $CDB = R + \frac{1}{2}A$ und $DCB = 2R - (A + B)$ ein ΔBCD; halbire BD in G, und errichte daſelbſt ein Loth GA bis zum Schnittpunkt A mit der Verlängerung von von CD; verbinde zuletzt A mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Conſtruction 2. Man conſtruire das erwähnte Dreieck BCD; ziehe aus C eine Gerade $CE \parallel DB$; fälle aus dem Halbirungspunkte G der BD ein Loth GF auf die CE, mache $FE = FC$; lege durch die Punkte E und B eine Gerade EA bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung von CD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck und $CD = EB = d$.

101. Aufgabe. Gegeben der Umfang $= u$, nebſt zwei Winkeln B und C.



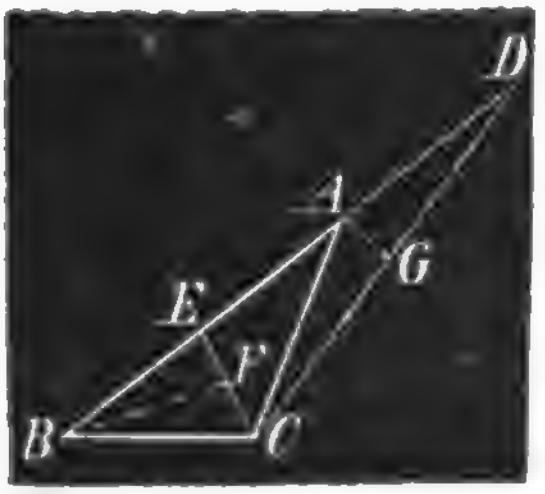
Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $\angle ABC = B$ und $\angle ACB = C$. Wird BC auf beiden Seiten verlängert, $BD = BA$ und $CE = CA$ gemacht, alsdann A mit D und E verbunden, ſo entſtehen zwei gleichſchenklige Dreiecke BAD und CAE. Da die Winkel B und C die Außenwinkel an den Spitzen dieſer Dreiecke ſind, ſo findet ſich Baſiswinkel $BDA = \frac{1}{2}B$ und Baſiswinkel $CEA = \frac{1}{2}C$, und iſt daher ΔADE aus dem gegebenen Umfang $DE = u$, als Baſis, und den beiden anliegenden Winkeln $\frac{B}{2}$ und $\frac{C}{2}$ conſtruirbar. Die Eckpunkte B und C des geſuchten Dreiecks ABC ſind die Schnittpunkte der Linie $DE = u$ mit den auf der Mitte der Seiten AD und AE errichteten Lothe FB und GC.

Digitized by Google

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = u und den beiden anliegenden Winkeln ADE = $\frac{1}{2}$ B und AED = $\frac{1}{2}$ C ein Δ ADE; halbire AD in F, wie auch AC in G; errichte in den Halbirungspunkten Lothe bis zu den Schnittpunkten B und C mit der DE; und verbinde A mit B und C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Δ BFD ≅ Δ BFA, daher BD = BA,
Δ CGE ≅ Δ CGA, daher CE = CA,
folglich: AB + AC = DB + CE.
Mithin AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = u.
Ferner: Baſiswinkel ADB = $\frac{1}{2}$ des Außenwinkels ABC an der Spitze des gleichſchenkligen Dreiecks BAD; mithin ∠ ABC = 2. ∠ ADB = $2.\frac{B}{2} = B$. Ebenſo findet ſich ∠ ACB = 2. ∠ AEC = $2.\frac{C}{2} = C$.

102. Aufgabe. Gegeben b + c − a = d; B; C.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, AB + AC = AB + AD = BD, BE = BC; mithin BD − BE = DE = AC + AB − BC = b + c − a = d; ferner ∠ ABC = B und ∠ ACB = C. Wird AB über A verlängert, AD = AC gemacht und D mit C verbunden, ſo entſteht ein gleichſchenkliges Dreieck ACD. Ein zweites gleichſchenkliges Dreieck BCE findet ſich, wenn man auf der Seite BD aus dem Punkte B eine Strecke BE = BC abſchneidet und E mit C verbindet. Außerdem kommt Δ DEC in Betracht, in welchem die Seite DE = d gegeben iſt. Die Winkel dieſes Dreiecks laſſen ſich mittels der Winkel der beiden gleichſchenkligen Dreiecke ACD und BCE aus den gegebenen Winkeln B und C beſtimmen. In dem Δ ABC iſt nämlich ∠ BAC = 2 R − (B + C), und da dieſer Winkel an der Spitze des gleichſchenkligen Dreiecks ACD liegt, ſo iſt der Baſiswinkel des letzteren, d. i. ∠ BDC = R − $\frac{1}{2}$ (B + C). Ferner iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck BCE der Winkel CBE = B gegeben, alſo der Baſiswinkel CEB = R − $\frac{1}{2}$ B, mithin ſein Nebenwinkel DEC = R + $\frac{1}{2}$ B. Dem-

Digitized by Google

gemäß kann Δ DEC aus einer Seite DE = d und den beiden anliegenden Winkeln EDC = $R - \frac{1}{2}(B + C)$ und CED = $R + \frac{1}{2}B$ conſtruirt werden. Aus Δ DEC ergiebt ſich aber das das geſuchte Δ ABC.

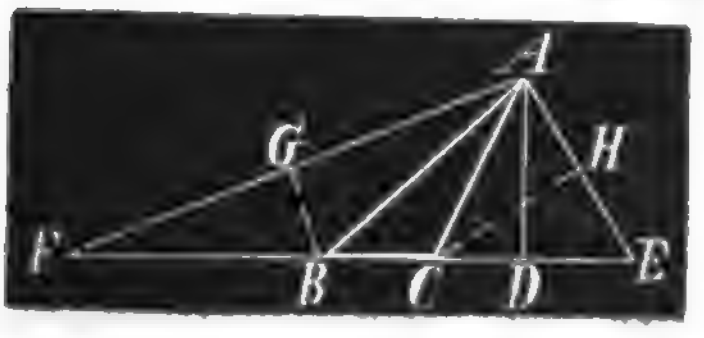
Conſtruction. Man couſtruire aus DE = d und den beiden anliegenden Winkeln EDC = $R - \frac{1}{2}(B + C)$ und CED = $R + \frac{1}{2}B$ ein Δ DEC; halbire CD in G; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GA bis an die Seite DE, und verbinde A mit C; verlängere DE über E; halbire EC in F; errichte im Halbirungspunkte F ein Loth FB bis an die Verlängerung der DE; und verbinde den Schnittpunkt B mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Δ BFE $\cong \Delta$ BFC, daher BE = BC.
Δ AGD $\cong \Delta$ AGC, daher AD = AC.
Mithin AB + AD = AB + AC.
Hiervon BE = BC
giebt AB + AD − BE = AB + AC − BC,
woraus folgt:
DE = AB + AC − BC = d.

Ferner iſt per constr. $\angle$ DEC = $R + \frac{1}{2}B$, alſo im gleichſchenkligen Dreieck BCE der Baſiswinkel BEC = BCE = $R - \frac{1}{2}B$, der Winkel an der Spitze, d. i. $\angle$ CBE = $2R - 2(R - \frac{1}{2}B) = 2R - (2R - B) = B$. Demgemäß iſt in dem geſuchten Dreieck ABC der $\angle$ ABC = B.

In dem gleichſchenkligen Dreieck ACD iſt $\angle$ ADC = $\angle$ ACD = $R - \frac{1}{2}(B + C)$, daher die Summe der beiden Baſiswinkel = $2R - (B + C)$, womit zugleich die Größe des Außenwinkels BAC an der Spitze des Dreiecks ACD gefunden iſt. Demgemäß iſt in dem geſuchten Δ ABC der Winkel BAC = $2R - (B + C)$. Da die Winkel ABC = B und BAC = $2R - (B + C)$ durch $\angle$ ACB zu 2 R ergänzt werden, ſo ergiebt ſich hieraus zuletzt $\angle$ ACB = C.

103. Aufgabe. Gegeben a + b + c = u; h_a; C.



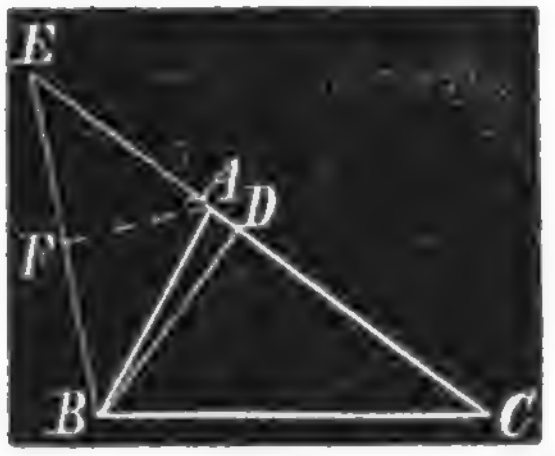
Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck; Höhe AD = h_a; $\angle$ ACB = C: ſo iſt $\angle$ ACD = 2 R − C und $\angle$ CAD = C − R, mithin das rechtwinklige Drei-

eck ACD conſtruirbar, woraus ſich eine Seite AC des geſuchten Dreiecks ABC ergiebt. Wird nun CD über D verlängert, bis $CE = CA$ iſt, und alsdann E mit A verbunden: ſo iſt $\angle ACB = C$ der Außenwinkel an der Spitze des gleichſchenkligen Dreiecks CAE, mithin Baſiswinkel $CEA = \frac{C}{2}$. Ferner hat man, weil bereits $CE = AC$ gefunden worden, CE über C zu verlängern, die Verlängerung $CF = CB + BF = CB + BA$ zu machen, und F mit A zu verbinden, wodurch das ΔAEF entſteht, in welchem die Grundlinie $EF = u$, der anliegende Winkel $AEF = \frac{C}{2}$ und die Höhe AD auf $EF = h_u$ gegeben iſt. Daher kann ΔAEF conſtruirt werden. Hieraus ergiebt ſich aber das geſuchte Dreieck ABC.

Conſtruction. Man conſtruire aus $EF = u$, als Grundlinie; $AD = h_u$, als Höhe, und dem an EF liegenden Winkel $AEF = \frac{C}{2}$ ein Dreieck AEF; halbire AF in G, und AE in H; errichte in den Halbirungspunkten G und H Perpendikel GB und HC bis zu den Schnittpunkten B und C mit der Grundlinie FE; und verbinde B und C mit A: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis in der Analyſis und Conſtruction enthalten.

104. Aufgabe. Gegeben $a + b + c = u$; h_b; C.

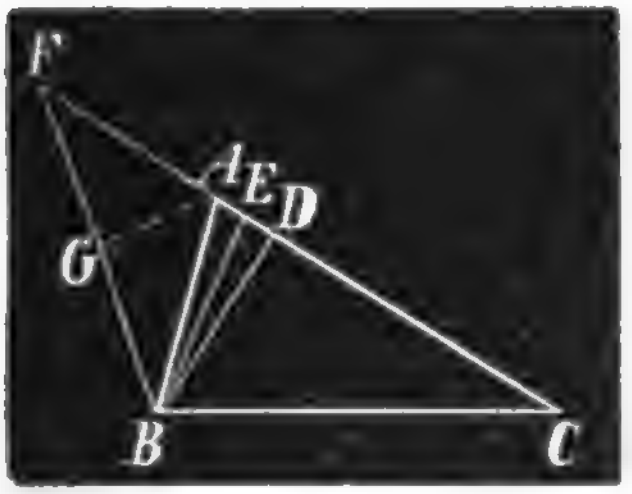


Analyſis. Es ſei im ΔABC der Umfang $BC + CA + AB = a + b + c = u$, die auf AC (oder b) ſtehende Höhe $BD = h_b$ und $\angle ACB = C$: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD aus der Kathete $BD = h_b$ und dem anliegenden ſpitzen Winkel $CBD = R - C$ conſtruirbar; mithin die Seite BC des geſuchten Dreiecks ABC gefunden. Demgemäß iſt die Summe der beiden andern Seiten desſelben, d. i. $AC + AB = u - BC$. Man verlängere alſo die Kathete CD über D, bis $CE = u - BC$ iſt, und verbinde E mit B. Hierdurch entſteht ΔCBE, in welchem zwei Seiten BC und CE, nebſt dem von ihnen eingeſchloſſenen Winkel C bekannt ſind. Demgemäß iſt auch ΔBCE conſtruirbar, und läßt ſich hieraus das geſuchte Dreieck ABC leicht finden.

Digitized by Google

Construction. Man construire aus $BD = h_b$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $DBC = R - C$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere CD über D, bis $CE = u - BC$ ist; verbinde E mit B; halbire EB in F; errichte im Halbirungspunkte F ein Loth FA bis zum Schnittpunkte A mit der CE; und verbinde A mit B: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

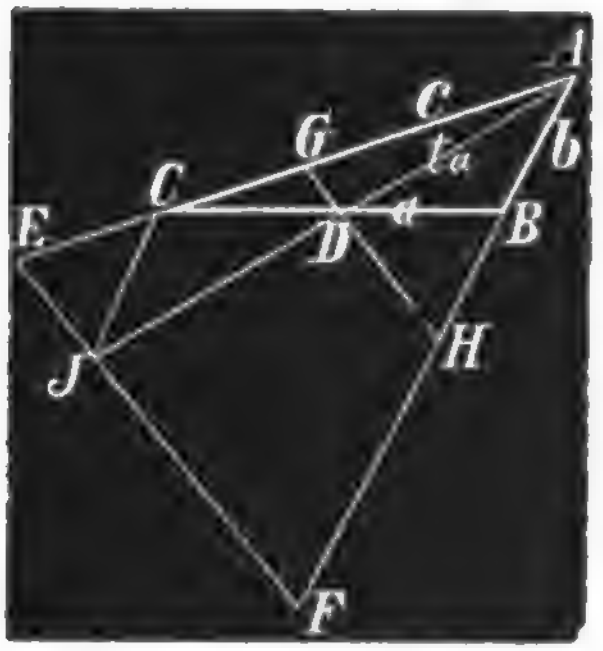
105. Aufgabe. Gegeben: $b + c - a = d$; h_b; C.



Analysis. Es sei im Δ ABC Seite $AC + AB - BC = d$, die auf AC stehende Höhe $BD = h_b$ und $\angle ACB = C$: so ist das rechtwinklige Dreieck BCD durch eine Kathete $BD = h_b$ und den gegenüberliegenden spitzen Winkel $BCD = C$ bestimmt, und demgemäß eine Seite BC (oder a) des gesuchten Dreiecks ABC gefunden. Wird nun CD über D verlängert, $CE = CB$ gemacht, und E mit B verbunden, so ergiebt sich das gleichschenklige Dreieck CBE, das ebenfalls construirbar ist. Hiermit ist die Linie BE (als Basis) und $\angle CEB = R - \frac{1}{2}C$ (als Basiswinkel) gefunden; und ergiebt sich hierzu (als Nebenwinkel) $\angle FEB = R + \frac{1}{2}C$. Der in der Verlängerung von CD liegende Schenkel EF des Winkels FEB besteht aus zwei Strecken. Es ist nämlich $EF = EA + AF = (AC - CB) + AF$, oder — wenn $AF = AB$ gedacht wird — $EF = AC + AB - BC = b + c - a = d$. Wird F mit B verbunden, so entsteht das Dreieck EBF, welches also aus zwei Seiten BE und $EF = d$ und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel $BEF = R + \frac{1}{2}C$ construirt werden kann. Mit Hülfe dieses Dreiecks ergiebt sich aber der dritte Eckpunkt A des gesuchten Dreiecks ABC.

Construction. Man construire aus $BD = h_b$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $CBD = R - C$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD; aus BC, als Schenkel, und dem an der Spitze liegenden Winkel $BCD = C$ ein gleichschenkliges Dreieck CBD; verlängere CE über E, bis $CF = d$ ist; verbinde F mit B; halbire BF in G; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GA bis zum Schnittpunkt A mit der CF; und verbinde A mit B: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

106. Aufgabe. Gegeben: $b + c = s$, die zur Mitte von a gehende Ecktransverſale t_a und $\angle A$.



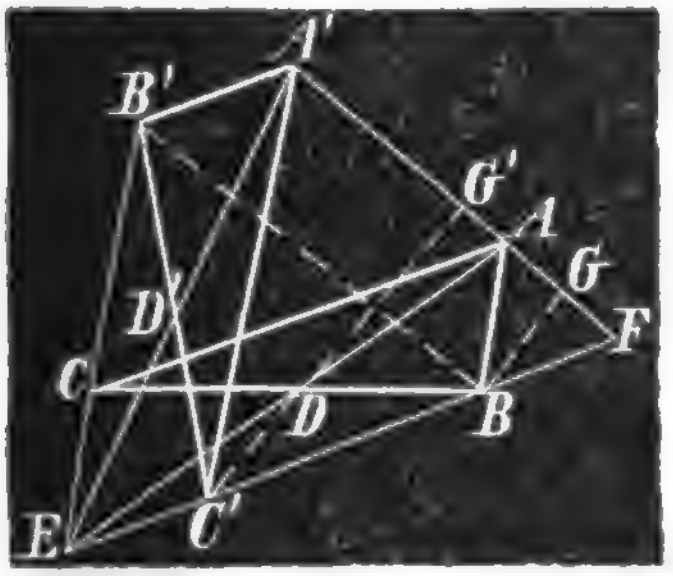
Analyſis I. Es ſei im Δ ABC Seite $AB + AC = s$, Transverſale $AD = t_a$ und $\angle BAC = A$. Man verlängere AC über C, und AB über B; mache $CE = AB$ und $BF = AC$; und verbinde E mit F: ſo entſteht ein gleichſchenkliges Dreieck AEF, in welchem der Schenkel $AE = AF = s$ und der Winkel EAF an der Spitze $= A$ gegeben iſt. Ein zweites gleichſchenkliges Dreieck AGH ergiebt ſich, wenn man die Schenkel AE und AF halbirt, und die Halbirungspunkte G und H durch eine Gerade GH verbindet. Wird die Linie GH mit $AD = t_a$ aus dem Punkte A geſchnitten, ſo findet ſich Punkt D, durch den die dritte Seite BC des geſuchten Dreiecks ABC geht, und in welchem ſie halbirt wird. Um aber die Lage der BC zu beſtimmen, hat man A mit D zu verbinden und AD bis zur Baſis EF zu verlängern, wodurch ſich $DJ = DA$ ergiebt; alsdann aus J eine Linie $JC \parallel FA$ bis an die Seite AE zu ziehen, wodurch ein Endpunkt C der Geraden BC gefunden wird. Durch die beiden Punkte C und D iſt die Lage der BC beſtimmt, und daher Δ ABC gefunden.

Conſtruction. Man conſtruire aus $\angle EAF = A$ und den gleichen Schenkeln desſelben $AE = AF = s$ ein gleichſchenkliges Dreieck AEF; halbire beide Schenkel; verbinde die Halbirungspunkte G und H durch eine Gerade GH; ſchneide letztere aus dem Punkte A mit $AD = t_a$ in dem Punkte D; lege durch die Punkte A und D bis zur Baſis EF eine Gerade AJ; ziehe aus dem Punkte J eine Linie $JC \parallel FA$ bis zur Seite AE; und lege durch C und D bis zur Seite AF eine Gerade CB: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. In dem gleichſchenkligen Dreieck AEF wird nicht nur jeder der beiden Schenkel AE und AF, ſondern auch die zur Baſis gehende Linie AJ durch die GH halbirt; mithin iſt $AD = DJ = t_a$. Da ferner $JC \parallel FA$ gezogen worden, ſo iſt $\angle CJD = \angle BAD$, während $\angle CDJ = BDA$ als Scheitelwinkel.

Daher ist Δ CDJ $\cong \Delta$ BDA, also CJ $=$ AB und CD $=$ DB, d. h. die Seite BC wird durch die Transversale AD $=$ t$_a$ im Punkte D halbirt. Die mit AF parallellaufende Linie CJ schneidet von dem Dreieck AEF ein gleichschenkliges Dreieck CEJ ab, in welchem CE $=$ CJ $=$ AB ist. Hieraus ergiebt sich AE $=$ AC $+$ CE $=$ AC $+$ AB $=$ c $+$ b $=$ s.

Anmerkung. Vorstehende Aufgabe könnte auch folgenden Wortausdruck erhalten: Ein Winkel EAH ist gegeben, und innerhalb desselben ein Punkt D. Man soll durch D eine Gerade so legen, daß ihre zwischen den Schenkeln befindliche Strecke in dem Punkte D halbirt und die Summe der von ihr abgeschnittenen Schenkelstücke, welche am Scheitel A zusammenstoßen, einer gegebenen Geraden gleich wird.



Analysis 2. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, AB $+$ AC $=$ s, Transversale AD $=$ t$_a$ und $\angle$ BAC $=$ A. Man lege an BC ein Δ BCE $\cong \Delta$ BCA so an, daß ein Parallelogramm CABE entsteht, in welchem die doppelte Transversale als Diagonale AE $=$ 2.t$_a$ erscheint. Hierdurch ergiebt sich ein Δ ABE, in welchem AB $+$ BE $=$ AB $+$ AC $=$ s, AE $=$ t$_a$ und $\angle$ ABE $=$ 2 R $-$ A (als Supplement zu $\angle$ BAC $=$ A im Parallelogramm CABE) gegeben ist. Wird nun EB über B verlängert, die Verlängerung BF $=$ BA gemacht, und F mit A verbunden, so ist auch Δ AEF bestimmt, denn es findet sich EF $=$ EB $+$ BF $=$ EB $+$ BA $=$ CA $+$ AB $=$ s, AE $=$ 2.t$_a$ und $\angle$ AFE $=$ $\frac{1}{2}$ von $\angle$ ABE $=$ $\frac{1}{2}$ (2 R $-$ A) $=$ R $-$ $\frac{1}{2}$ A. Aus Δ AEF ergiebt sich aber mittels eines Lothes GB auf der Mitte von AF der Punkt B in der Seite EF, so daß bereits die Eckpunkte A und B des gesuchten Dreiecks ABC gefunden sind. Der Halbirungspunkt D der Linie AE $=$ 2.t$_a$ liegt in der Mitte der geraden Linie BC, welche den gefundenen Punkt B mit dem dritten Punkte C des Dreiecks ABC verbindet. Demgemäß läßt sich nun Δ ABC construiren.

Construction. Man construire aus zwei Seiten AE $=$ t$_a$ und EF $=$ s und dem der Seite AE gegenüberliegenden Win-

by Google

kel $AFE = R - \frac{1}{2}A$ ein ΔAEF; halbire AF in G; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GB bis zum Schnittpunkte B mit der Seite EF; halbire die Seite AE in D; lege durch die Punkte B und D eine gerade Linie BC; mache $DC = DB$ und verbinde C mit A: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Aus den Seiten $AE = 2.t_a$ und $EF = s$ und dem $\angle AFE = R - \frac{1}{2}A$, welcher der kleineren dieſer beiden Seiten, d. i. der Seite AE gegenüberliegt, läßt ſich aber noch ein zweites Dreieck A'EF conſtruiren, in welchem $A'E = AE = 2.t_a$, $EF = s$ und $\angle A'FE = R - \frac{1}{2}A$ iſt. Man halbire A'F in G'; errichte im Halbirungspunkte G' ein Loth G'C' bis zum Schnittpunkte C' mit der Seite EF; halbire A'E in D'; lege durch C' und D' eine Gerade C'B'; mache $D'B' = D'C'$, und verbinde B' mit A': ſo entſpricht auch $\Delta A'B'C'$ den Bedingungen der Aufgabe.

Übrigens iſt $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$.

Beweis. Es iſt $EF = EB + BF = CA + AB = s$; $AD = \frac{1}{2}.AE = t_a$, und in dem Parallelogramm CABE Winkel $ABE = 2R - A$, mithin ſein Supplementwinkel $BAC = A$; alſo ABC das geſuchte Dreieck.

In dem zweiten Falle iſt B'A'C'E als Viereck, deſſen Diagonalen A'E und B'C' ſich gegenſeitig halbiren, ein Parallelogramm, alſo A'B' parallel und gleich C'E, wie auch A'C' parallel und gleich B'E; daher $A'B' \parallel AC$ und $A'C' \parallel AB$, woraus folgt: $\angle C'A'B = \angle BAC = A$; ferner:

$A'B' = C'E$ (als gegenüberſtehende Seiten des Parallelogramms B'A'C'E)

und $A'C' = C'F$ (als Schenkel des gleichſchenkligen Dreiecks C'A'F);

mithin $A'B' + A'C' = EC' + C'F = EF = s$.

Da endlich $A'E = AE = 2.t_a$ iſt, ſo findet ſich $\frac{1}{2}A'E = A'D' = t_a$. Demgemäß entſpricht auch $\Delta A'B'C'$ den Bedingungen der Aufgabe.

Um zu beweiſen, daß die beiden Dreiecke ABC und A'B'C' congruent ſind, verbinde man B mit B', wodurch ſich ein Parallelogramm A'B'BF ergiebt. Alsdann iſt $A'B' = FB = BA$, und daher $A'C' = s - A'B' = s - BA = AC$. Es ſtimmen alſo die Dreiecke ABC und A'B'C' in zwei Seiten und dem

Digitized by Google

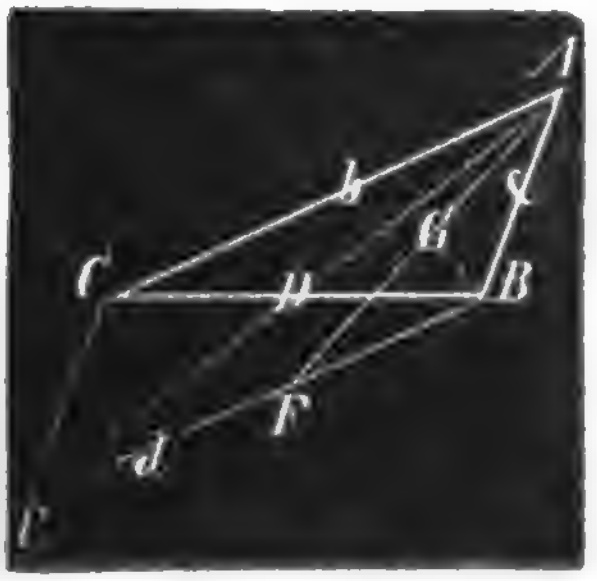
von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel überein, d. h. Δ ABC $\cong \Delta$ A'B'C'.

Determination. Die Aufgabe ist unmöglich, wenn

$$t_a \lessgtr \frac{s}{2}$$

gegeben ist.

107. Aufgabe. Gegeben: $b - c = d$, die zur Mitte von a gehende Transversale $= t_a$ und $\angle A$.



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, $AC - AB = d$, Transversale $AD = t_a$ und $\angle BAC = A$. Man vervollständige Δ ABC zu einem Parallelogramm ABEC, in welchem die Diagonale $AE = 2.AD = 2.t_a$ ist; schneide aus dem Punkte B die kleinere Seite AB auf der größeren Seite BE ab, so daß $BE - AB = BE - BF = FE = d$ wird; und verbinde F mit A: so ist Δ AEF durch zwei Seiten $AE = 2.t_a$ und $EF = d$, und den der größeren Seite AE gegenüberliegenden Winkel AFE bestimmt. In dem Parallelogramm ABEC ist nämlich $\angle ABE = 2R - A$, daher in dem gleichschenkligen Dreieck BAF der Basiswinkel $BFA = \frac{A}{2}$, mithin des letzteren Nebenwinkel $AFE = 2R - \frac{A}{2}$. Es läßt sich also Δ AEF construiren. Mit Hülfe dieses Dreiecks findet sich aber Punkt B, so wie durch Halbirung der Linie AE Punkt D, in welchem die durch B und D gehende Linie BC halbirt wird. Hiermit ist Δ ABC gefunden.

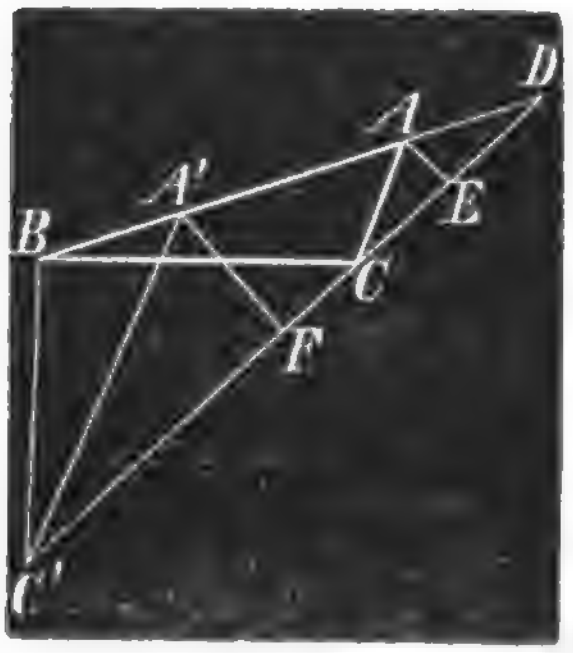
Construction. Man construire aus $AE = 2.t_a$, $EF = d$ und dem der größeren Seite AE gegenüberliegenden Winkel $AFE = 2R - \frac{A}{2}$ ein Dreieck AEF; halbire AF in G, und AE in D; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GB bis zum Schnittpunkte B mit der Verlängerung von EF (über F); verbinde B mit D; verlängere BD über D; mache die Verlängerung $DC = DB$; und verbinde zuletzt A mit B und C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ist in der Analysis und Construction enthalten.

Digitized by Google

Determination. Damit die Aufgabe möglich ſei, muß $d < 2.t_a$, alſo $\frac{d}{2} < t_a$ gegeben ſein.

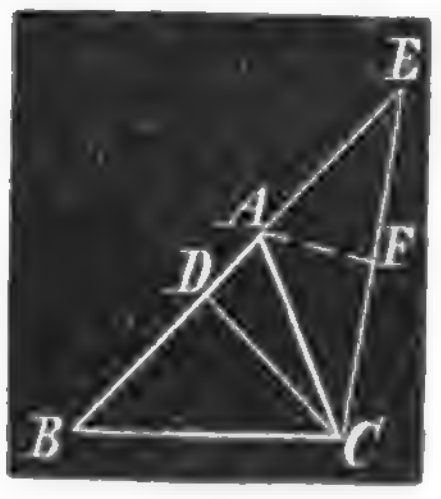
108. Aufgabe. Gegeben: a; A; $b + c = s$.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck; $BC = a$, $\angle BAC = A$ und $AC + AB = s$. Wird BA über A verlängert, die Verlängerung $AD = AC$ gemacht und D mit C verbunden, ſo iſt in dem gleichſchenkligen ΔACD Winkel $ADC = \frac{A}{2}$, und daher ΔBCD aus zwei Seiten $BC = a$, $BD = s$ und dem der kleineren Seite BC gegenüberliegenden Winkel $BDC = \frac{A}{2}$ möglicherweiſe conſtruirbar. Aus ΔBCD ergiebt ſich aber ΔABC.

Conſtruction. Man zeichne einen Winkel $BDC' = \frac{A}{2}$; mache den einen Schenkel $BD = b + c = s$, ſchneide aus dem Endpunkte B mit $BC = a$ den andern Schenkel DC' in den Punkten C und C'; verbinde C und C' mit B; halbire CD in E und C'D in F; errichte in den Halbirungspunkten E und F die Lothe EA und FA' bis zu den Schnittpunkten A und A' mit der Seite BD; und verbinde A mit C, wie auch A' mit C': ſo iſt $\Delta ABC \cong \Delta A'BC'$, und jedes von ihnen den Bedingungen der Aufgabe gemäß, was leicht bewieſen werden kann.

109. Aufgabe. Gegeben: $b + c = s$; h_a; B.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $AC + AB = s$, $CD = h_a$ und Winkel $ABC = B$: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD beſtimmt, und mit dieſem eine Seite BC des geſuchten Dreiecks ABC gefunden. Man verlängere nun BD über D, bis $BE = s$ wird, und verbinde E mit C: ſo iſt auch ΔBCE conſtruirbar, da in demſelben zwei Seiten und der von ihnen eingeſchloſſene Winkel B gegeben ſind. Wird CE zur Baſis eines gleichſchenkligen Dreiecks

Digitized by Google

ACE gemacht, ſo findet ſich auch der Eckpunkt A des geſuchten Dreiecks ABC.

Conſtruction. Man conſtruire aus $CD = h_c$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $BCD = R - B$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD über D, bis $BE = s$ iſt; verbinde E mit C; halbire CE in F; errichte im Halbirungspunkte F ein Loth FA bis zum Schnittpunkte A mit der BE; und verbinde A mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

110. Aufgabe. Gegeben: $b - a = d$, c, A.

Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $AD = d$, $AB = c$, $\angle BAC = A$: ſo iſt Δ ABD durch zwei Seiten und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel A beſtimmt. Aus Δ ABD ergiebt ſich aber Δ ABC.

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = c$, $AD = d$ und dem von dieſen Seiten eingeſchloſſenen Winkel BAD ein Dreieck ABD; halbire BD in E; errichte im Halbirungspunkte E ein Loth EC bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von AD; und verbinde C mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

111. Aufgabe. Gegeben: $b - a = d$; c; C.

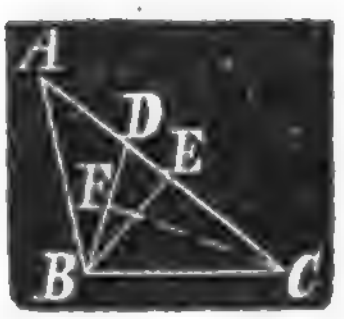
Analyſis. (Die vorige Figur.) Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $AD = d$, $AB = c$ und $\angle ACB = C$. Man verbinde B mit D, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck CBD Baſiswinkel $BDC = R - \frac{1}{2} C$, daher ſein Nebenwinkel $ADB = R + \frac{1}{2} C$, und demgemäß Δ ABD conſtruirbar. Hiermit iſt auch Δ ABC gefunden.

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = c$, $AD = d$ und dem der größeren Seite AB gegenüberliegenden Winkel $ADB = R + \frac{1}{2} C$ ein Δ ABD; verlängere AD über D; halbire BD in E; errichte im Halbirungspunkte E ein Loth EC bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von AD; und verbinde C mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

112. Aufgabe. Gegeben: $b - a = d$; c; h_b.

Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $AC - BC = AD = d$; $AB = c$ und $BE = h_b$: ſo iſt das rechtwinklige

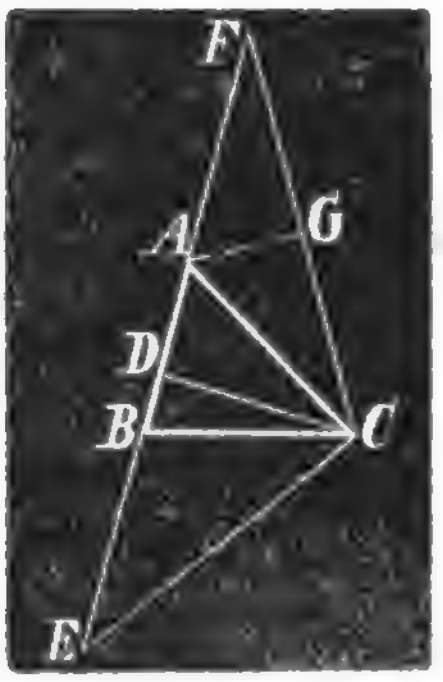
Digitized by Google



Dreieck ABE conſtruirbar. Wird auf AE aus dem Punkte A eine Strecke AD = d abgeſchnitten und D mit B verbunden, ſo erſcheint BD als Baſis eines gleichſchenkligen Dreiecks CBD, womit die Conſtruction gefunden iſt.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = c, als Hypotenuſe, und BE = h_b, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ABE, ſchneide auf AE aus dem Punkte A eine Strecke AD = d ab; verbinde D mit B; halbire BD in F; errichte im Halbirungspunkte F ein Loth FC bis zum Schnittpunkt C mit der Verlängerung von AE; und verbinde C mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

113. Aufgabe. Gegeben: a + b + c = u; h_c; B.

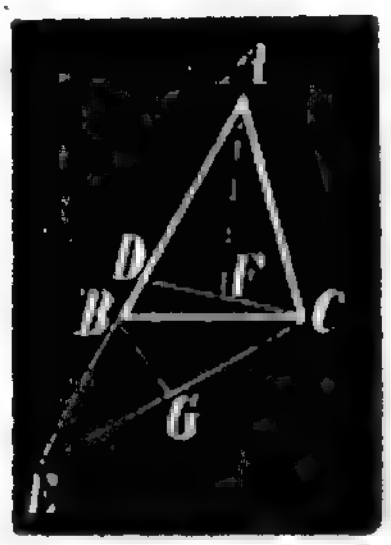


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, BC + AC + AB = u, Höhe CD = h_c und ∠ ABC = B: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD aus der Kathete CD = h_c und dem anliegenden ſpitzen Winkel BCD = R − B conſtruirbar, und dieſes Dreieck enthält eine Seite BC des geſuchten Dreiecks ABC. Wird nun BD auf beiden Seiten verlängert, die Verlängerung BE = BC und alsdann BF = u − BC gemacht und F mit C verbunden: ſo iſt auch das rechtwinklige Dreieck ACF beſtimmt, und läßt ſich nun, wenn man die Seite CF zur Baſis eines gleichſchenkligen Dreiecks ACF macht, auch Punkt C finden.

Conſtruction. Man conſtruire aus CD = h_c, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel BCD = R − B ein rechtwinkliges Dreieck BCD; verlängere BD auf beiden Seiten, ſo daß BE = BC und BF = u − BC wird; verbinde F mit C; halbire CF in G; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GA bis zum Schnittpunkte A mit der Seite EF; und verbinde A mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

114. Aufgabe. Gegeben a + c − b = d; A; B.

Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, BC + AB − AC = d, ∠ BAC = A und ∠ ABC = B. Wird AB über B verlängert, die Verlängerung BE = BC gemacht, und auf



AE aus dem Punkte A eine Strecke AD = AC abgeschnitten, und D mit C verbunden; so ist Δ CDE bestimmt. Es ist nämlich DE = a + c − b = d; ferner in dem gleichschenkligen Δ ACD Basiswinkel ADC = ∠ ACD = R − ½ A; daher in dem Δ CDE Winkel CDE = 2 R − (R − ½ A) = R + ½ A, während (als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks BEC) ∠ DEC = ½ B ist. Es läßt sich also Δ CDE aus einer Seite DE = d und den beiden anliegenden Winkeln EDC = R + ½ A und DEC = ½ B construiren. Aus Δ CDE ergiebt sich aber das gesuchte Dreieck ABC, wenn auf der Mitte der Seiten CE und CD die Lothe GB und FA bis an die Linie AE errichtet werden.

Construction. Man construire aus DE = a + c − b = d und den beiden anliegenden Winkeln EDC = R + ½ A und DEC = ½ B ein Δ CDE; halbire CD in F, CE in G; und errichte in jedem Halbirungspunkte ein Loth FA und GB bis zu den Schnittpunkten A und B mit der verlängerten DE; und verbinde A und B mit C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

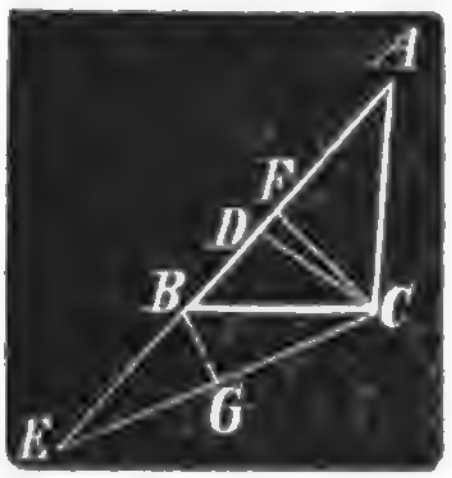
Beweis. Δ AFD ≅ Δ AFC, daher AC = AD.
Δ BGC ≅ Δ BGE, daher BC = BE.
Mithin ist AB − AD = AB − AC = BD.
Hierzu BE = BC;
giebt: BE + AB − AD = BC + AB − AC = BE + BD = DE = d.

Ferner ist per constr. ∠ ACE = ½ B, daher ∠ ABC = B (als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks BCE). Der Außenwinkel CDE an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks ACD ist = R + ½ A gemacht worden, daher ist der Basiswinkel ADC = ACD des genannten Dreiecks = R − ½ A. Mithin muß ∠ CAE = 2 R − 2 (R − ½ A) = A sein. Demgemäß entspricht Δ ABC allen Bedingungen der Aufgabe.

115. Aufgabe. Gegeben: a + c − b = d; h_c; A.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, BC + AB − AC = a + c − b = d, Höhe CF = h_c und ∠ BAC = A: so ist das rechtwinklige Dreieck ACF durch eine Kathete CF = h_c und einen spitzen Winkel CAF = A bestimmt, und hiermit

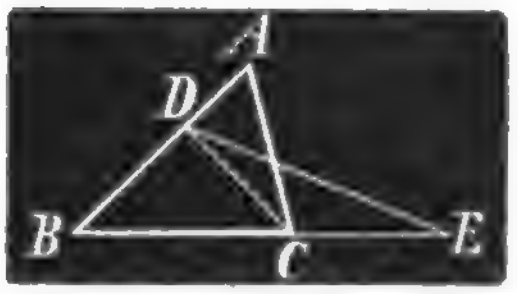
Digitized by Google



eine Seite AC (oder b) des geſuchten Dreiecks ABC gefunden. Wird nun AF über F beliebig verlängert, und aus dem Punkte A eine Strecke AD = AC abgeſchnitten und der Reſt der Verlängerung DE = a + c − b = d gemacht, ſo entſteht durch Verbindung der Punkte E und C ein Δ ACE, welches durch zwei Seiten AC und AE und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel CAE beſtimmt iſt, ſo daß nun auch Punkt B gefunden werden kann.

Conſtruction. Man conſtruire aus CF = h_a, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel ACF = R − A ein rechtwinkliges Dreieck ACF; verlängere AF über F; ſchneide aus dem Punkte A auf der verlängerten AF eine Strecke AD = AC ab; mache den Reſt der verlängerten AF, nämlich die Strecke DE, = d; verbinde E mit C; halbire CE in G; errichte im Halbirungspunkte G ein Loth GB bis zum Schnittpunkte B mit der Linie AE; und verbinde B mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

116. Aufgabe. Gegeben: a + h_c = s; B; b.

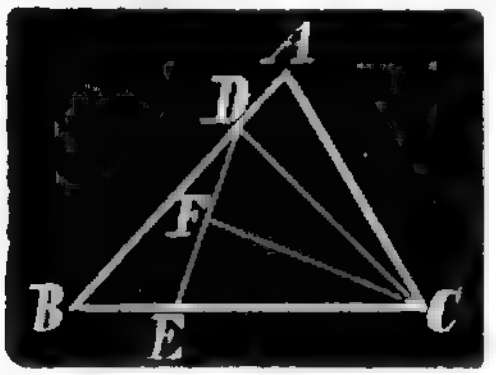


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, BC + CD = BC + CE = BE = s; AC = b und ∠ ABC = B. Man ziehe DE, ſo iſt in dem rechtwinkligen Dreieck BCD der Winkel BCD = R − B, daher in dem gleichſchenkligen Dreieck CDE Baſiswinkel CED = $\frac{1}{2}$ (R − B); mithin Δ DBE aus einer Seite BE = s und den beiden anliegenden Winkeln DBE = B und BED = $\frac{1}{2}$ (R − B) conſtruirbar. Hierzu ergiebt ſich Punkt C als Schnittpunkt des in D errichteten Lothes DC mit der Linie BE, und zuletzt auch Punkt A als Schnittpunkt der gegebenen Seite AC = b mit der Verlängerung von BD.

Conſtruction. Man conſtruire aus BE = s und den beiden anliegenden Winkeln ABE = B und DEB = $\frac{1}{2}$ (R − B) ein Δ BED; errichte in D ein Loth DC bis zum Schnittpunkt C mit der BE; ſchneide aus C mit CA = b die Verlängerung von BD im Punkte A; und verbinde A mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. $\angle BCD = R - B$; $\angle DCE = R + B$ und $\angle BED = \frac{1}{2}(R - B)$; mithin $\angle CDE = 2R - (R + B) - \frac{1}{2}(R - B) = \frac{1}{2}(R - B) = \angle CED$, also Loth CD = Strecke CE, woraus folgt: $BC + CD = BC + CE = BE = a + h_c = s$.

117. Aufgabe. Gegeben: $a - h_c = d$; A; B.



Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $BC - CD = BC - CE = BE = d$, $\angle BAC = A$ und $\angle ABC = B$. Errichtet man die Höhe CD, ſo iſt $\angle BCD = R - B$; und wird $CE = CD$ gemacht und D mit E verbunden, ſo findet ſich $\angle CED = \frac{1}{2}[2R - (R - B)] = \frac{1}{2}(R + B$; mithin $\angle BED = \frac{1}{2}(3R - B)$. Es iſt alſo ΔBED aus einer Seite $BE = d$ und den beiden anliegenden Winkeln conſtruirbar. Hierzu findet ſich Punkt C, der in der Verlängerung von BE und in dem auf der Mitte von DE errichteten Lothe FC (auch in dem Lothe DC, das auf BD im Punkte D errichtet worden) liegt. Punkt A ergiebt ſich durch Conſtruction des rechtwinkligen Dreiecks CDA aus CD, als Kathete, und dem gegenüberliegenden Winkel A.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BE = d$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABC = B$ und $BED = \frac{1}{2}(3R - B)$ ein ΔBDE; verlängere BD über D, und BE über E; errichte in D auf BD ein Loth DC bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von BE; trage an CD im Punkte C einen Winkel $DCA = R - A$ an, und verlängere den Schenkel CA bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung der BD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Hauptſächlich iſt zu zeigen, daß $CD = CE$ iſt. Es findet ſich:

$$\angle BDC = R,$$

$$\angle BDE = 2R - \angle(B + BED) = 2R - \tfrac{1}{2}(3R + B) = \tfrac{1}{2}(R - B)$$

alſo $\angle CDE = R - \frac{1}{2}(R - B) = \frac{1}{2}(3R + B) = \angle CED$,

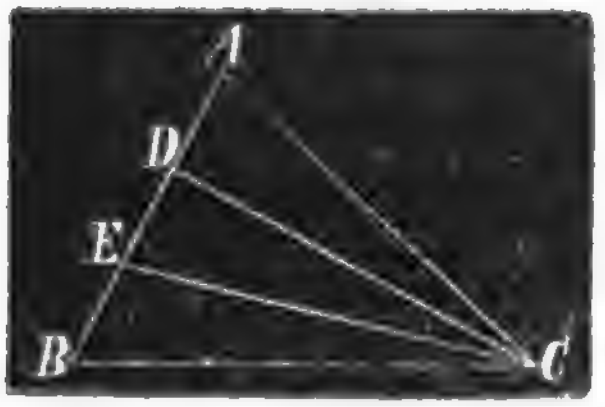
woraus folgt:

$$CE = CD,$$

daher $BC - CD = BC - CE = BE = d$.

118. Aufgabe. Gegeben: a, h_c und die Differenz der von h_c auf c gebildeten Abſchnitte $BD - DA = d$.

Digitized by Google

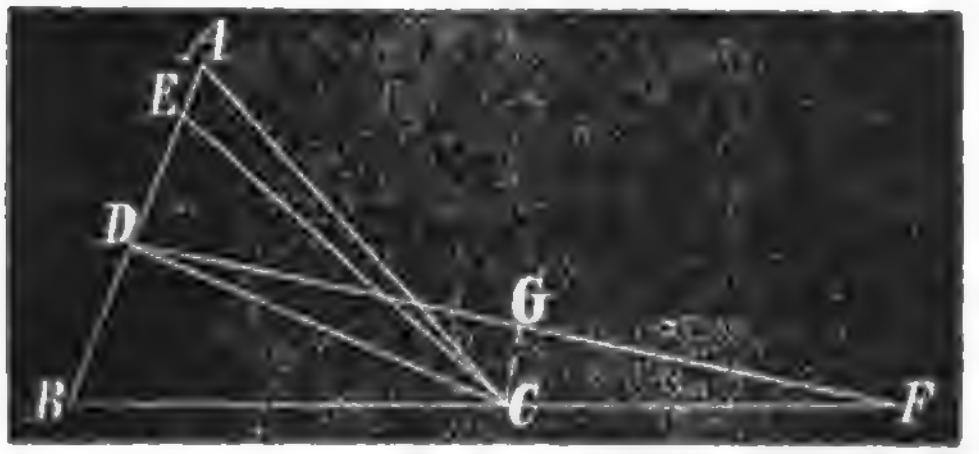


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, BC = a, Höhe CD = h_c, wie auch BD — DA = BD — DE = BE = d: ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD durch die Hypotenuſe BC = a und eine Kathete CD = h_c beſtimmt. Man trage auf der Kathete BD aus B eine Strecke BE = d ab und verbinde E mit C: ſo iſt CE ein Schenkel des gleichſchenkligen Dreiecks ACD, nämlich CE = CA, und läßt ſich daher Punkt A leicht finden.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = a, als Hypotenuſe, und CD = h_c, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BCD; trage aus B auf BD eine Strecke BE = d ab; verlängere BD über D um DA = DE = BD — BE = BD — d; und verbinde A mit C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Es iſt BC = a und Höhe CD = h_c per constr.; ferner AD = DE, während BE = d gegeben iſt; mithin BD — DA = BD — DE = BE = d.

119. Aufgabe. Gegeben: a + h_c = s; B und die Differenz der von h_c auf c gebildeten Abſchnitte AD — DB = d.

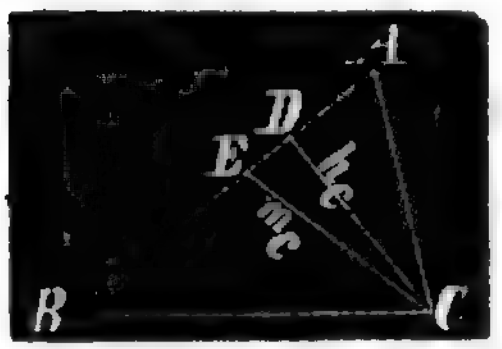


Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, BC + CF, d. i. BF = BC + CD = a + h_c = s; AD — DB = AD — DE = AE = d und Winkel ABC = B. Man verbinde die Punkte D und E mit C, wie auch D mit F. Da CD ſenkrecht auf AB ſteht, ſo iſt ∠ BCD = R — B, mithin in dem gleichſchenkligen Dreieck CDF Baſiswinkel CFD = $\frac{1}{2}$ (R — B); folglich Δ DBF aus einer Seite BF = s und den beiden anliegenden Winkeln ABF = B und BFD = $\frac{1}{2}$ (R — B) conſtruirbar. Wird nun BD über D verlängert und die Verlängerung DE = DB gemacht, alsdann BE um EA = d über E verlängert, ſo ergiebt ſich Punkt A, während Punkt C als Spitze des über DF errichteten gleichſchenkligen Dreiecks CDF leicht zu finden iſt.

Construction. Man construire aus $BF = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABF = B$ und $BFD = \frac{1}{2}(R - B)$ ein ΔBDF; errichte in dem Halbirungspunkte G der Seite DF ein Loth GC bis zum Schnittpunkte C mit der Seite BF; verlängere BD über D, mache die Verlängerung $DA = BD + d$; und verbinde A mit C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ist in der Analysis und Construction enthalten.

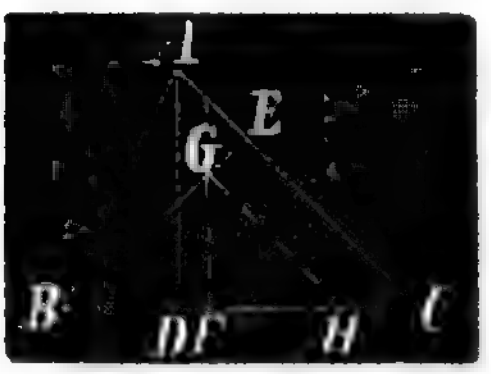
120. Aufgabe. Gegeben: h_c; C und m_c.



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, Höhe $CD = h_c$, $\angle ACB = C$ und die den Winkel C halbirende Transversale CE nach $AB = m_c$; so ist das rechtwinklige Dreieck CDE durch die Hypotenuse $CE = m_c$ und eine Kathete $CD = h_c$ bestimmt. Da ferner $\angle ACE = \angle BCE = \frac{1}{2}C$ werden muß, so hat man, um ΔABC zu finden, im Punkte C auf beiden Seiten der CE einen Winkel $= \frac{C}{2}$ anzutragen.

Construction. Man construire aus $CD = h_c$, als Kathete, und $CE = m_c$, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck CDE; verlängere DE auf beiden Seiten; trage an CE im Punkte C auf beiden Seiten einen Winkel $ECB = ECA = \frac{1}{2}C$ an, und verlängere die Schenkel CB und CA bis an die Verlängerung von DE: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

121. Aufgabe. Gegeben: c, h_a und $B - C = \delta$.

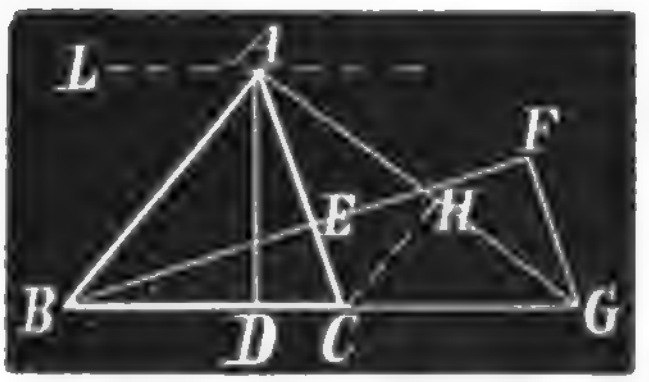


Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, $AB = c$, $AD = h_a$ und $\angle ABC - ACB = \angle ABC - EBC = \angle ABE = \delta$: so ist das rechtwinklige Dreieck ABD durch die Hypotenuse $AB = c$ und eine Kathete $AD = h_a$ bestimmt, und $\angle ABC = B$ gefunden. Wird von diesem Winkel ein Winkel $ABE = \delta$ abgeschnitten, so ergiebt sich $\angle EBC = \angle ECB = C$. Mithin ist ΔEBC gleichschenklig, nämlich $EB = EC$. Ebenso ergiebt sich, wenn man aus einem beliebigem Punkte H der BC eine Parallele HG zu CA zieht, ein gleichschenkliges Dreieck GBH nämlich $GB = GH$. Hiermit ist die Construction gefunden.

Digitized by Google

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = c$, als Hypotenuſe, und $AD = h_a$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ABD; trage im Punkte B an AB einen Winkel $ABE = \delta$ an; verlängere BD über D; ſchneide aus einem beliebigen Punkte G des Schenkels BE mit einer Geraden $= BG$ die Verlängerung der BD im Punkte H; verbinde G mit H; und ziehe aus A eine Gerade $AC \parallel GH$ bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von BD: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

122. Aufgabe. Gegeben: $a + b = s$; h_a; h_b.



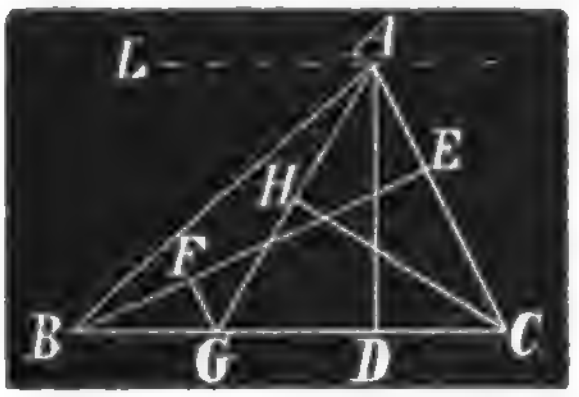
Analyſis. Es ſei ABC das geſuchte Dreieck, $BC + AC = BC + CG = BG = s$; Höhe $AD = h_a$ und Höhe $BE = h_b$. Da die Summe zweier Seiten $(a + b)$ eines Dreiecks, als Hypotenuſe, der (von a und b) eingeſchloſſene Winkel C, (als Winkel an der Hypotenuſe), und die Summe der zugehörigen Höhen $(h_a + h_b)$, als Kathete, in einem rechtwinkligen Dreieck liegen, ſo kann man die Höhe $BE = h_b$ über E verlängern, die Verlängerung $EF =$ Höhe $AD = h_a$ machen, und F mit G verbinden, wodurch das rechtwinklige Dreieck BFG entſteht, während auch ΔBEC rechtwinklig iſt. Daher iſt $FG \parallel EC$ und $\angle FGB = \angle ECB$. Da $CG = CA$ werden ſoll, ſo muß $\angle CGA = \angle CAG = \frac{1}{2}(\angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle FGB)$ ſein, d. h. $\angle FGB$ iſt zu halbiren. Die Halbirungslinie GA dieſes Winkels und die unter dem Abſtande $AD = h_a$ mit BG parallellaufende Linie LA ſchneiden einander im Punkte A, während das über AG errichtete gleichſchenklige Dreieck CAG auch den Punkt C ergiebt, womit ΔABC gefunden iſt.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BG = s$, als Hypotenuſe, und $BF = h_a + h_b$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck FBG; errichte auf BG in einem beliebigen Punkte D ein Loth $DA = h_a$; lege durch A eine Gerade $LA \parallel BG$; halbire $\angle FGB$ durch die bis an die Linie LA gehende Gerade GA; halbire GA in H; errichte im Halbirungspunkte H ein Loth HC bis an die BG; und verbinde A mit B und C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Der Beweis iſt in der Analyſis und Conſtruction enthalten.

by Google

123. Aufgabe. Gegeben: $a - b = d$; h_a; h_b.



Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck, $BC - AC = BC - CG = BG = d$; Höhe $AD = h_a$ und Höhe $BE = h_b$. Man schneide auf der größeren Höhe $BE = h_b$ aus dem Punkte E die kleinere Höhe $AD = EF = h_a$ ab, und verbinde F mit G: so ist BFG ein rechtwinkliges Dreieck, und daher FG ∥ EC, wie auch $\angle BGF = \angle BCE$; denn hier gilt der Satz:

> Die Differenz zweier Seiten $(a - b)$ eines Dreiecks, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel (C) und die Differenz der zugehörigen Höhen $(h_b - h_a)$ liegen in einem rechtwinkligen Dreieck. (Es ist nämlich die Hypotenuse $= a - b$, eine Kathete $= h_b - h_a$ und der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel $= C$).

Wird G mit A verbunden, so findet sich, weil $CG = CA$ ist: $\angle CAG = \angle CGA = R - \frac{1}{2}C$. Es ist aber $\angle BGF = C$, mithin $\angle FGA = 2R - C - (R - \frac{1}{2}C) = R - \frac{1}{2}C = \angle CGA$; d. h. $\angle CGF$ wird durch die Linie AG halbirt, welche letztere die unter einem Abstande $AD = h_a$ zu BC gezogene Parallele LA in dem Punkte A schneidet. Hierzu findet sich auch C als Schnittpunkt der Verlängerung von BG und des auf der Mitte von AG errichteten Lothes HC.

Construction. Man construire aus $BG = a - b = d$, als Hypotenuse, und $BF = h_b - h_a$, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck BFG, verlängere BG über G; errichte in einem beliebigen Punkte D dieser Linie ein Loth $DA = h_a$; lege durch A eine Gerade LA ∥ BD; halbire $\angle FGD$; verlängere die Halbirungslinie GA dieses Winkels bis zum Schnittpunkte A mit der Geraden LA; halbire GA in H; errichte im Halbirungspunkte H ein bis zur Verlängerung der BG gehendes Loth HC; und verbinde sodann A mit B und C: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ist in der Analysis und Construction enthalten.

Wenn man zuerst Δ BFG construirt, alsdann BF um $FE = AD = h_a$ verlängert, wie auch BG über G bis zum Schnittpunkt C mit dem auf BE im Punkte E errichteten und bis

Digitized by Google

zur oberen Parallele LA verlängerten Lothe CEA; und zuletzt A mit B verbindet: ſo hat der Beweis zu zeigen, daß in dem Dreieck ABC die Strecke CG gleich der Seite AC iſt.

Anmerkung. Die in Aufgabe 122 und 123 herangezogenen Sätze, welche für jedes Dreieck gelten, nämlich:

a) Die Summe zweier Seiten $(a + b)$ eines Dreiecks, die Summe der zugehörigen Höhen $(h_a + h_b)$ und der von den erwähnten Seiten eingeſchloſſene Winkel (C) liegen in einem rechtwinkligen Dreieck. Iſt $C > R$, ſo liegt ſein Supplement in dieſem Hülfsdreieck;

b) die Differenz zweier Seiten $(a - b)$ eines Dreiecks, die Differenz der zugehörigen Höhen $(h_b - h_a)$ und der von den erwähnten Seiten eingeſchloſſene Winkel (C) liegen in einem rechtwinkligen Dreieck. Iſt $C > R$, ſo liegt ſein Supplement in dieſem Hülfsdreieck;

ergeben ſich aus der Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke. Es iſt nämlich in Aufgabe 122:

$$BC : CG = BE : EF \quad \text{oder} \quad BG : BC = BF : BE$$
$$a : b = h_b : h_a \qquad a + b : a = h_a + h_b : h_b$$

und in Aufgabe 123:

$$BC : CG = BE : EF \quad \text{oder} \quad BG : BC = BF : BE$$
$$a : b = h_b : h_a \qquad a - b : a = h_b - h_a : h_b.$$

Hieraus folgt zugleich:

$$a + b : a - b = h_a + h_b : h_b - h_a.$$

Aufgabe 122 und 123, wie auch die noch folgenden dieſes Abſchnitts gehören daher ſtrenggenommen in das Gebiet der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke, indem erſt dort der Beweis mit aller Schärfe geführt werden kann.

Mit Hülfe der oben angegebenen Sätze könnte in den beiden vorſtehenden Fällen auch folgender Weg eingeſchlagen werden.

In Aufgabe 122 ſuche man die Differenz der Seiten $a - b$, in Aufgabe 123 die Summe der Seiten $a + b$, und beſtimme ſodann aus der Summe und Differenz die Seiten ſelbſt, womit beide Mal das Dreieck ABC gefunden iſt.

124. Aufgabe. Gegeben: $h_a + h_b = h$; A, C.

Conſtruction. (Fig. der 122. Aufgabe.) Man conſtruire aus $BF = h_a + h_b = h$, als Kathete, und dem gegenüberliegenden Winkel $BGF = C$ (reſp. $BGF = 2R - C$) ein recht-

Digitized by Google

winkliges Dreieck FBG, wodurch sich $BG = a + b$ ergiebt; trage alsdann an BG im Punkte G einen Winkel $BGA = \frac{1}{2} C$, und im Punkte B einen Winkel $GBA = 2R - (A + C)$ an; verlängere die Schenkel GA und BA bis zum Schnittpunkte A; errichte im Halbirungspunkte H der AG ein Loth HC bis zum Schnittpunkte C mit der BG; und verbinde C mit A: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

125. Aufgabe. Gegeben: $h_b - h_a = h'$; A; C.

Construction. (Fig. der **123.** Aufg.) Man construire aus $BF = h_b - h_a = h'$, als Kathete, und dem gegenüberliegenden Winkel $BGF = C$ (resp. $BGF = 2R - C$) ein rechtwinkliges Dreieck FBG, wodurch sich $BG = a - b$ ergiebt; trage alsdann an BG im Punkte B einen Winkel $GBA = 2R - (A + C)$ an; verlängere BG über G; halbire den hierdurch entstehenden Außenwinkel des Dreiecks FBG mittels der Geraden GA, welche den Schenkel BA des Winkels ABG in A schneidet; errichte im Halbirungspunkte H der AG ein Loth HC; verlängere letzteres bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von BG; und verbinde C mit A: so ist ABC das gesuchte Dreieck, nämlich $BE - AD = BE - EF = BF = h_b - h_a = h'$, $\angle BAC = A$ und $\angle ACB = C$.

126. Aufgabe. Gegeben: $a + b = s$; h_a; C.

Construction. (Figur der **122.** Aufg.) Man construire aus $BG = a + b = s$, als Hypotenuse, und dem anliegenden Winkel $BGF = C$ (resp. $2R - C$) ein rechtwinkliges Dreieck FBG; schneide aus dem Punkte F auf BF eine Strecke $FE = h_a$ ab; lege durch E eine unbegränzte Gerade $AC \parallel FG$, welche die $BG = s$ im Punkte C schneidet; errichte in einem beliebigen Punkte D der BG ein Loth $DA = h_a$; ziehe durch A eine Gerade $LA \parallel BG$, wodurch sich Punkt A ergiebt; und verbinde zuletzt B und C mit A: so ist ABC das gesuchte Dreieck, nämlich $BC + AC = BC + CG = BG = a + b = s$; Höhe $AD = h_a$ und $\angle ACB = C$.

127. Aufgabe. Gegeben: $a - b = d$; h_a; C.

Construction. (Figur der **123.** Aufg.) Man construire aus $BG = a - b = d$, als Hypotenuse, und dem anliegenden Winkel $BGF = C$ (resp. $2R - C$) ein rechtwinkliges Dreieck FBG; verlängere BG über G, etwa bis C; ziehe unter dem

Digitized by Google

Abſtande $AD = h_a$ zu BC eine Parallele LA; halbire $\angle FGC$ durch die unbegränzte Gerade GA, wodurch ſich Punkt A in der Parallele LA ergiebt; errichte im Halbirungspunkte H der AG ein Loth HC bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von BG; und verbinde A mit B und C: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck, nämlich $BC - AC = BC - CG = BG = a - b = d$, Höhe $AD = h_a$ und $\angle ACB = C$.

128. Aufgabe. Gegeben: $a + b = s$; $h_b - h_a = h'$; C.

Conſtruction. (Figur der 123. Aufg.) Man conſtruire aus $BF = h_b - h_a = h'$, als Kathete, und dem gegenüberliegenden Winkel $FGB = C$ (reſp. $2R - C$) ein rechtwinkliges Dreieck FBG, wodurch ſich $BG = a - b = d$ ergiebt; verlängere BG über G bis C, ſo daß $BC = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(s + d)$ wird; conſtruire aus CG, als Schenkel, und Winkel $GCA = C$, als Winkel an der Spitze, ein gleichſchenkliges Dreieck CAG; und verbinde A mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck, nämlich $BC + AC = a + b = s$; Höhe $BE - AD = BE - EF = BF = h_b - h_a = h'$ und $\angle ACB = C$.

129. Aufgabe. Gegeben: $a - b = d$; $h_a + h_b = h$; C.

Conſtruction. (Figur der 122. Aufg.) Man conſtruire aus $BF = h_a + h_b = h$, als Kathete, und dem gegenüberliegenden Winkel $BGF = C$ (reſp. $2R - C$) ein rechtwinkliges Dreieck FBG, wodurch $BG = a + b = s$ gefunden wird; ſchneide aus dem Punkte B auf BG eine Strecke $BC = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(s + d)$ ab; conſtruire aus GC, als Schenkel, und $\frac{1}{2}(\angle ACB) = \frac{1}{2}C$, als Winkel an der Spitze, ein gleichſchenkliges Dreieck CAG; und verbinde A mit B: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck, nämlich $BC - AC = d$; Höhe $AD + BE = EF + EB = BF = h_a + h_b = h$ und $\angle ACB = C$.

---

5. Conſtruction der Parallelogramme.

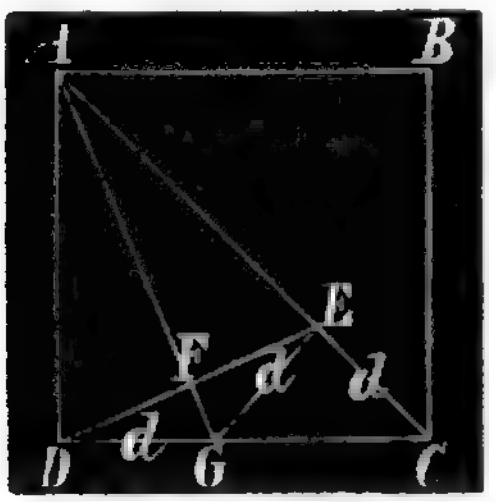
a. Das Quadrat.

130. Aufgabe. Gegeben: die Diagonale $AC = e$.

Conſtruction. Man conſtruire über $AC = e$, als Hypotenuſe, auf beiden Seiten ein rechtwinklig-gleichſchenkliges Dreieck, ſo iſt das entſtehende Viereck ABCD das geſuchte Quadrat.

Digitized by Google

131. Aufgabe. Gegeben: die Differenz der Diagonale und Seite = d.



Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Quadrat, AC − AD = AC − AE = CE = d, so ist, weil in jedem gleichseitigen Parallelogramm die Winkel durch die Diagonalen halbirt werden, in dem gleichschenkligen Dreieck ADE Winkel DAE = $\frac{R}{2}$, also Basiswinkel AED = $\frac{3}{4}$ R, daher sein Nebenwinkel DEC = $\frac{5}{4}$ R. Mithin ist Δ CDE aus einer Seite CE = d und den beiden anliegenden Winkeln DEC = $\frac{5}{4}$ R und DCE = $\frac{1}{2}$ R construirbar. Aus Δ CDE ergiebt sich aber das gleichschenklige Dreieck ADE und zuletzt das gesuchte Quadrat ABCD.

Construction. Man construire aus Seite CE = d und den beiden anliegenden Winkeln DCE = $\frac{1}{2}$ R und CED = $\frac{5}{4}$ R ein Δ CDE; verlängere CE über E, und errichte im Halbirungspunkte F der Seite DE ein Loth FA bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung von CE; verbinde A mit D und lege an AC ein Δ ABC ≅ Δ ADC.

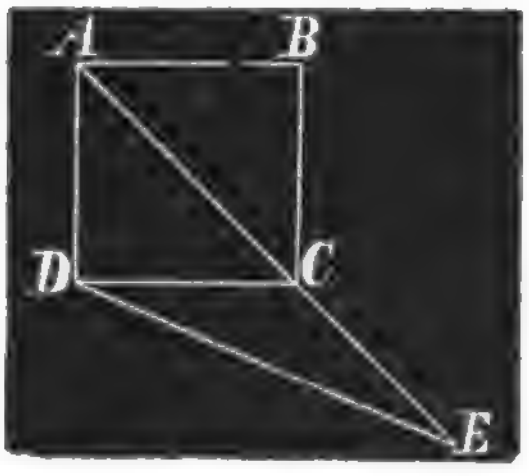
Der Beweis hat zu zeigen, daß AD = CD und ∠ ADC = R ist. Man hat AE = AD als Seiten des gleichschenkligen Dreiecks ADE; ∠ DEC = $\frac{5}{4}$ R per constr., daher sein Nebenwinkel DEA = $\frac{3}{4}$ R, also auch ∠ ADE = $\frac{3}{4}$ R. Demgemäß ist ∠ DAE = 2 R − 2 ($\frac{3}{4}$) R = (2 − 1$\frac{1}{2}$) R = $\frac{1}{2}$ R, während Winkel DCE = $\frac{1}{2}$ R gemacht worden, woraus erhellt: ∠ CAD = ∠ ACD, also auch Seite AD = CD. Ferner ist ∠ CDE = 2 R − ∠ CED − ECD = 2 R − $\frac{5}{4}$ R − $\frac{1}{2}$ R = $\frac{1}{4}$ R, daher ∠ ADC = ∠ ADE + ∠ EDC = $\frac{3}{4}$ R + $\frac{1}{4}$ R = R.

Determination. Wird in obiger Figur die Linie AF bis zum Punkte G in der Seite CD verlängert, und G mit E verbunden, so ist DG = GE = EC, und GE senkrecht auf EC, wonach die Seite des Quadrats = d + $\sqrt{2d^2}$ ist. Die Aufgabe unterliegt keiner Beschränkung.

132. Aufgabe. Gegeben die Summe der Diagonale und Seite = s.

Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Quadrat, AC +

Digitized by Google



$CD = AC + CE = AE = s$. Wird AC um $CE = CD$ verlängert, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck CDE Winkel $DCE = \frac{3}{2} R$, alſo Baſiswinkel $DEA = \frac{1}{4} R$; mithin ΔADE durch eine Seite $AE = s$ und die beiden anliegenden Winkel $DAE = \frac{1}{2} R$ und $AED = \frac{1}{4} R$ beſtimmt. Wird nun auf Seite AD im Punkte D ein Loth DC bis zum Schnittpunkte C mit der Seite AE errichtet, ſo iſt $CD = DA$ die Seite des geſuchten Quadrats.

Conſtruction. Man conſtruire aus einer Seite $AE = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $DAE = \frac{1}{2} R$ und $AED = \frac{1}{4} R$ ein ΔADE; errichte in D auf AD ein Loth DC bis zum Schnittpunkte C mit der AE und lege an AC ein $\Delta ABC \cong \Delta ACD$: ſo iſt das Viereck ABCD das geſuchte Quadrat.

Beweis. Da im $\Delta ADE \angle DAE = \frac{1}{2} R$ und $\angle AED = \frac{1}{4} R$ iſt, ſo findet ſich $\angle ADE = \frac{5}{4} R$, daher $\angle CDE = \frac{5}{4} R - R = \frac{1}{4} R = \angle CED$, woraus folgt: $CD = CE$, wie auch $\angle DCE = \frac{3}{2} R$, mithin ſein Nebenwinkel $ACD = \frac{1}{2} R = \angle CAD$, und demgemäß $CD = DA$. Folglich iſt $AC + AD = AC + CD = AC + CE = AE = s$, während $\angle ADC = R$ gemacht worden. Mithin iſt das rechtwinklig-gleichſchenklige Dreieck DAC die Hälfte des geſuchten Quadrats.

Determination. Die Aufgabe unterliegt keiner Beſchränkung. Die Seite des geſuchten Quadrats iſt $= \sqrt{2s^2} - s$ und wird daher auch gefunden, wenn man die gegebene Summe s zur Kathete eines rechtwinklig-gleichſchenkligen Dreiecks macht und die Hypotenuſe des letzteren um die Strecke s vermindert.

b. Das Rechteck.

133. Aufgabe. Gegeben: zwei Seiten a und b.

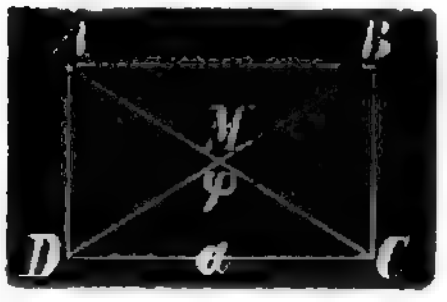
Conſtruction. Man conſtruire aus a und b, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck, und lege an die Hypotenuſe desſelben ein ihm congruentes Dreieck, und zwar ſo, daß die gleichen Seiten einander gegenüberliegen.

134. Aufgabe. Gegeben: eine Seite a und die Diagonale e.

Conſtruction. Man conſtruire aus der Diagonale e, als

Hypotenuse, und der Seite a, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck und ergänze letzteres zum Rechteck.

135. Aufgabe. Gegeben: eine Seite a und der ihr gegenüberliegende Winkel φ der Diagonalen.



Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Rechteck, Seite $CD = a$ und $\angle CMD = \varphi$, so ist, weil die Diagonalen eines Rechtecks gleich sind und einander halbiren, MCD ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der Winkel an der Spitze $= \varphi$, mithin Basiswinkel $MCD = MDC = R - \frac{1}{2}\varphi$ ist. Aus dem construirbaren Dreieck MCD ergiebt sich aber leicht das gesuchte Rechteck.

Construction. Man construire aus $CD = a$, als Basis, und $\angle CDM = R - \frac{\varphi}{2}$, als Basiswinkel, ein gleichschenkliges Dreieck MCD; verlängere die gleichen Schenkel über M um sich selbst, wodurch sich die Punkte A und B ergeben; und verbinde A mit D und B, wie auch B mit C: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis. Es ist $\Delta MCD \cong \Delta MAB$, daher CD parallel und gleich BA. Ebenso ist $\Delta MAD \cong \Delta MCB$, daher AD parallel und gleich BC. Mithin ist ABCD ein Parallelogramm. Da ferner $\angle CMD = \varphi$ gemacht worden, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck MAD Winkel $AMD = 2R - \varphi$, daher Basiswinkel $MDA = \frac{\varphi}{2}$, während in dem Δ MCD Basiswinkel MDC $= R - \frac{\varphi}{2}$ ist per constr. Demgemäß ist $\angle MDA + \angle MDC = \angle ADC = \frac{\varphi}{2} + R - \frac{\varphi}{2} = R$, also Parallelogramm ABCD ein Rechteck und den Bedingungen der Aufgabe gemäß.

136. Aufgabe. Gegeben die Diagonale $= e$ und $\angle \varphi$. (Vorige Figur.)

Analysis. Es sei ABCD das gesuchte Rechteck, Diagonale $AC = BD = e$ und $\angle CMD = \varphi$, so ist das gleichschenklige Dreieck MCD aus dem Schenkel $MD = \frac{e}{2}$ und dem an der Spitze liegenden Winkel $CMD = \varphi$ construirbar. Aus diesem Dreieck ergiebt sich aber das gesuchte Rechteck.

Digitized by Google

Conſtruction. Man conſtruire aus $MD = \frac{e}{2}$, als Schenkel, und $\angle CMD = \varphi$, als Winkel an der Spitze, ein gleichſchenkliges Dreieck MCD; verlängere die gleichen Schenkel über M um ſich ſelbſt; und verbinde die Endpunkte A und B mit einander, wie auch A mit D, und B mit C: ſo iſt ABCD das geſuchte Rechteck.

Beweis wie oben.

137. Aufgabe. Gegeben: eine Seite a und $\angle CDB = \gamma$. (Dieſelbe Figur.)

Analyſis. Es ſei ABCD das geſuchte Rechteck, $CD = a$ und $\angle CDB = \gamma$; ſo iſt das rechtwinklige Dreieck BCD aus $CD = a$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $CDB = \gamma$ conſtruirbar. Aus dieſem Dreieck ergiebt ſich ſofort das geſuchte Rechteck.

Conſtruction. Man conſtruire aus $CD = a$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $CDB = \gamma$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD und ergänze letzteres zum Rechteck.

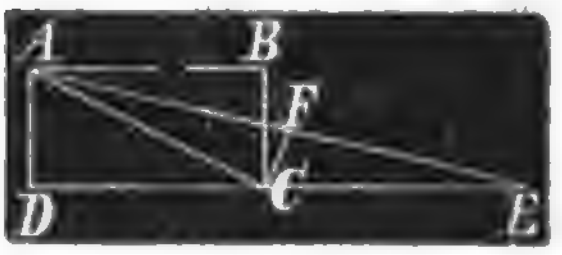
Beweis. $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, $\angle ADB = \angle CBD = R - \gamma$, mithin $\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = (R - \gamma) + \gamma = R$.

138. Aufgabe. Gegeben: die Diagonale e und $\angle CDB = \gamma$. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus $BD = e$, als Hypotenuſe, und den beiden ſpitzen Winkeln $CDB = \gamma$ und $CBD = R - \gamma$ ein rechtwinkliges Dreieck BCD, und ergänze letzteres zu dem geſuchten Rechteck ABCD.

Beweis wie in voriger Aufgabe.

139. Aufgabe. Gegeben: eine Seite $= b$, und die Summe der andern Seite und einer Diagonale $= s$.



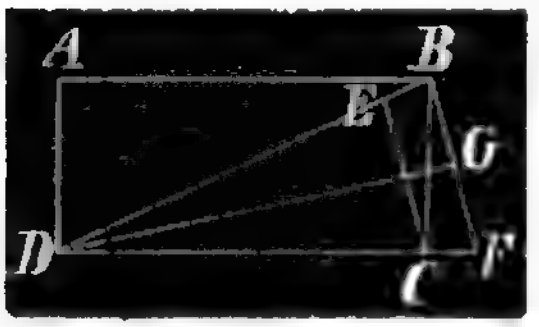
Analyſis. In dem Rechteck ABCD ſei $AD = b$, $CD + AC = DC + CE = DE = s$, ſo iſt ΔACE conſtruirbar, denn Seite $AD = b$, Seite $DE = s$ und $\angle ADE = R$. Hierzu findet ſich Punkt C als Spitze des über AE errichteten gleichſchenkligen Dreiecks CAE.

Conſtruction. Man conſtruire aus $AD = b$ und $DE = s$, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck ADE; errichte auf der Hypotenuſe AE im Halbirungspunkte F ein Loth FC bis

Digitized by Google

zum Schnittpunkte C mit der DE; errichte in C auf DE ein Loth CB = DA = b, und verbinde B mit A: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

140. Aufgabe. Gegeben: Seite b und die Differenz der Diagonale und der andern Seite = d.

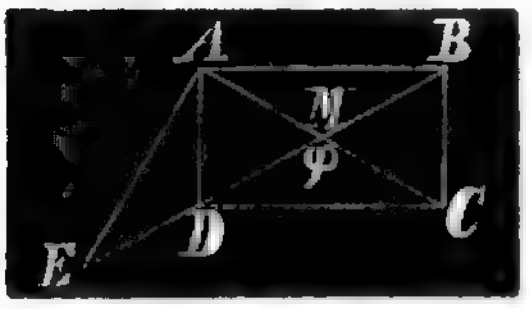


Analysis. Es sei in dem Rechteck ABCD Seite BC = b und BD — BC = BD — DE = BE = d. Wird DC über C verlängert, die Verlängerung CF = EB = d gemacht, und F mit B, so wie C mit E verbunden, so ergeben sich zwei gleichschenklige Dreiecke DBF und DEC, deren Grundlinien BF und EC parallellaufen. Außerhalb des Rechtecks liegt das rechtwinklige Dreieck BCF, dessen Katheten BC = b und CF = d gegeben sind. Wird nun CF über C verlängert, und auf BF im Halbirungspunkte G ein unbegränztes Loth errichtet, so schneiden sich diese Linien im Punkte D, womit die andere Seite CD des gesuchten Rechtecks gefunden ist.

Construction. Man construire aus BC = b und CF = d, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck BCF; verlängere CF über C; errichte im Halbirungspunkte G der BF ein Loth GD bis zum Schnittpunkte D mit der Verlängerung von FC; errichte auf CD im Punkte D ein Loth DA = CB = b; und verbinde A mit B: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Beweis in der Analysis und Construction.

141. Aufgabe. Gegeben: φ, b + e = s.



Analysis. Es sei im Rechteck ABCD der von den Diagonalen gebildete Winkel CMD, welcher der größeren Seite gegenüberliegt, = φ, die Summe der Diagonale und der kleineren Seite, d. i. BD + DA = BD + DE = BE = s, so ist in dem gleichschenkligen Dreieck MBC der an der Spitze liegende Winkel BMC = $2R - \varphi$ und der Basiswinkel $MBC = \frac{\varphi}{2}$, daher $\angle ABE = R - \frac{\varphi}{2}$. Man verbinde E mit A, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck DAE, in welchem der Außenwinkel an der Spitze ADB

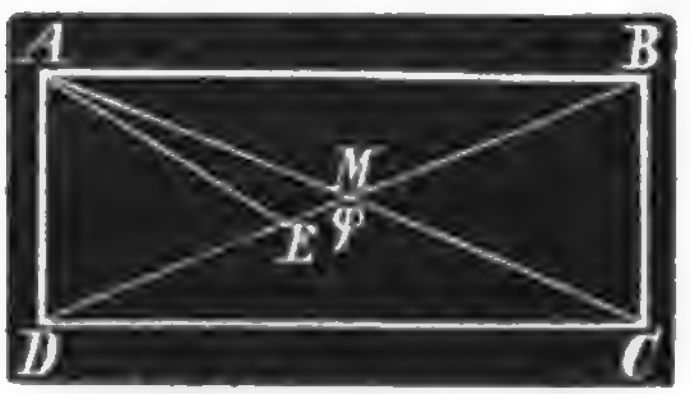
Digitized by Google

$= \angle DBC = \frac{\varphi}{2}$ iſt. Hieraus findet ſich Baſiswinkel $AEB = \frac{\varphi}{4}$, und kann daher ΔABE aus einer Seite $BE = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABE = R - \frac{\varphi}{2}$ und $AEB = \frac{\varphi}{4}$ conſtruirt werden. Wird in A auf AB ein Loth AD errichtet, ſo ergiebt ſich Punkt D und hiermit auch Punkt C, ſo daß alsdann das geſuchte Rechteck gefunden iſt.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BE = s$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABE = R - \frac{\varphi}{2}$ und $AEB = \frac{\varphi}{4}$ ein ΔABE, womit Seite AB des geſuchten Rechtecks gefunden iſt; errichte auf AB im Punkte A ein Loth AD bis zum Schnittpunkte D mit der BE, wodurch man eine zweite Seite AD des Rechtecks erhält; errichte auf AB im Punkte B ein Loth $BC = AD$, wie auch auf AD im Punkte D ein Loth $DC = AB$: ſo iſt ABCD das geſuchte Rechteck.

Der Beweis hat zu zeigen, daß $AD = DE$ iſt. Daß ABCD ein Rechteck iſt, erhellt aus der Conſtruction. Demzufolge iſt auch ΔMAD gleichſchenklig. Da der Winkel MAD an der Spitze desſelben $= 2R - \varphi$ iſt, ſo findet ſich Baſiswinkel $ADM = \frac{1}{2}\varphi$, ſein Nebenwinkel $ADE = 2R - \frac{1}{2}\varphi$, während $\angle AED = \frac{1}{4}\varphi$ gemacht worden. Hiernach iſt $\angle DAE$, als Supplement der Dreieckswinkel ADE und $AED = \frac{1}{4}\varphi = \angle AED$, mithin ΔDAE gleichſchenklig, nämlich $DA = DE$, und daher $BD + DA = BD + DE = BE = s$.

142. Aufgabe. Gegeben φ, $e - b = d$.



Analyſis. In dem Rechteck ABCD ſei $\angle CMD = \varphi$, $BD - AD = BD - DE = BE = d$, ſo findet ſich $\angle ABD = R - \frac{\varphi}{2}$, ferner in dem gleichſchenkligen Dreieck MAD der an der Spitze liegende Winkel $AMD = 2R - \varphi$ und Baſiswinkel $MDA = MAD = \frac{\varphi}{2}$, ſo daß im gleichſchenkligen Dreieck DAE ſich ergiebt $\angle DAE = \angle DEA = \frac{1}{2}\left(2R - \frac{\varphi}{2}\right) = R - \frac{\varphi}{4}$, folglich

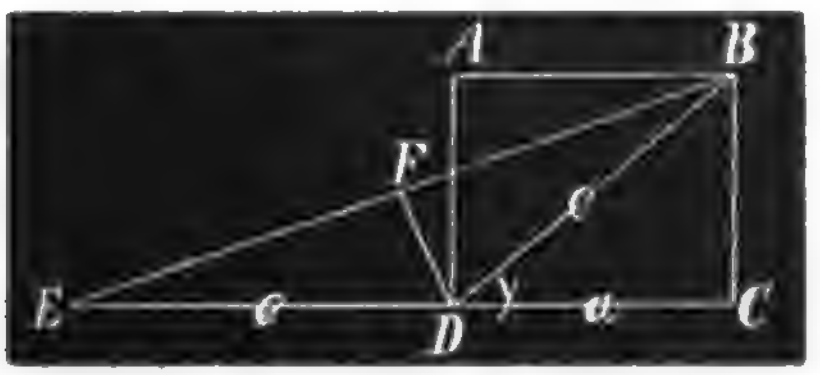
Digitized by Google

$\angle AEB = R + \frac{\varphi}{4}$, und kann daher ΔABE aus einer Seite $BE = d$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABE = \frac{\varphi}{2}$ und $AEB = R + \frac{\varphi}{4}$ construirt werden. Aus diesem Dreieck ergiebt sich aber das gesuchte Rechteck.

Construction. Man construire aus einer Seite $BE = d$ und den beiden anliegenden Winkeln $ABE = \frac{\varphi}{2}$ und $AEB = R + \frac{\varphi}{4}$ ein ΔABE, wodurch sich die größere Seite AB des Rechtecks ergiebt; errichte auf AB in den Endpunkten die Lothe AD und BC, ersteres bis zum Schnittpunkte D mit der Seite BD; mache $BC = AD$; und verbinde C mit D: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

Der Beweis hat zu zeigen, daß $AD = DE$ ist. $\angle AEB = R + \frac{\varphi}{4}$, daher $\angle AED = R - \frac{\varphi}{4}$, während $\angle ADE = \frac{\varphi}{2}$. Mithin ist der zu den Dreieckswinkeln AED und ADE gehörige Supplementwinkel $EAD = 2R - \left(R - \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\varphi}{2} = \left(R + \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\varphi}{2} = R - \frac{\varphi}{4} = \angle AED$, woraus erhellt $AD = DE$ und $BD - AD = BD - DE = BE = d$.

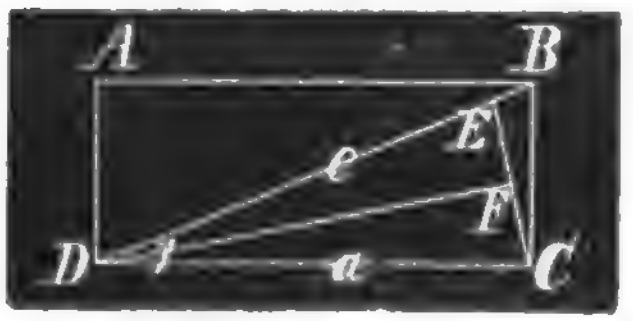
143. Aufgabe. Gegeben: $a + e = s$ und der zwischen a und e liegende Winkel γ.



Construction. Man construire aus $CE = a + e = s$, als Kathete, und dem anliegenden spitzen Winkel $BEC = \frac{\gamma}{2}$ ein rechtwinkliges Dreieck; errichte im Halbirungspunkte F der Hypotenuse BE ein Loth FD bis an die Kathete CE, alsdann im Punkte D ein Loth $DA = CB$; und verbinde A mit B: so ist in dem Rechteck ABCD $\angle BDC = \gamma$ und $CD + BD = CD + DE = CE = s$.

Digitized by Google

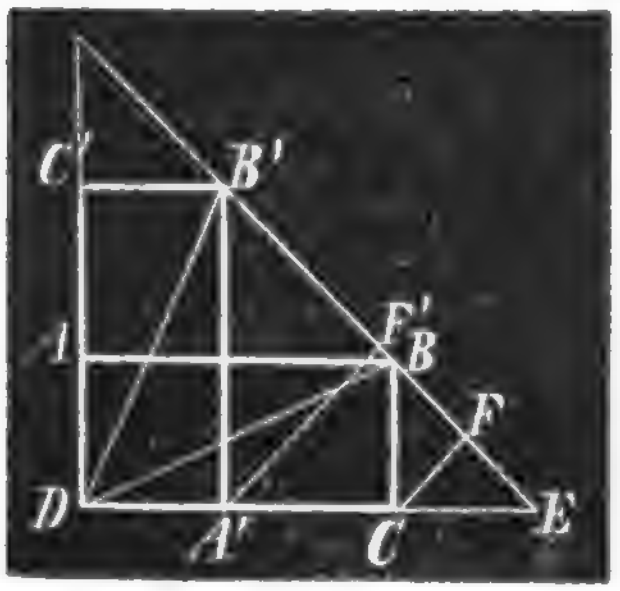
144. Aufgabe. Gegeben: $e - a = d$ und $\angle(ae) = \gamma$.



Analyſis. In dem Rechteck ABCD ſei $BD - CD = BD - DE = BE = d$ und $\angle BDC = \gamma$. Verbindet man E mit C, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck DCE der Winkel $CDE = \gamma$, mithin Baſiswinkel $DEC = DCE = R - \frac{1}{2}\gamma$, woraus folgt: $\angle BEC = R + \frac{1}{2}\gamma$ und $\angle BCE = R - (R - \frac{1}{2}\gamma) = \frac{1}{2}\gamma$. Demnach iſt ΔBEC conſtruirbar. Mit dieſem Dreieck iſt die Conſtruction gefunden.

Conſtruction. Man conſtruire aus $BE = d$, dem anliegenden Winkel $BEC = R + \frac{1}{2}\gamma$ und dem gegenüberliegenden Winkel $BCE = \frac{1}{2}\gamma$ ein ΔBCE; verlängere BE über E; errichte auf CE im Halbirungspunkte F ein Loth FD bis zum Schnittpunkt D mit der Verlängerung von BE; verbinde D mit C; errichte auf CD im Punkte D ein Loth $DA = CB$; und ziehe zuletzt AB: ſo iſt ABCD das geſuchte Rechteck.

145. Aufgabe. Gegeben: $a + b = s$; e.



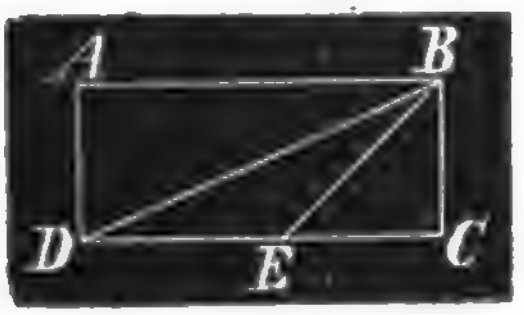
Analyſis. Im Rechteck ABCD ſei $DC + CB = DC + CE = DE = s$, Diagonale $BD = e$, ſo iſt, wenn E mit B verbunden wird, BCE ein rechtwinklig-gleichſchenkliges Dreieck und $\angle BEC = \frac{1}{2}R$; mithin ΔBDE aus zwei Seiten $DE = s$ und $BD = e$ und einem Winkel $DEB = \frac{1}{2}R$, der aber der kleineren Seite $BD = e$ gegenüberliegt, conſtruirbar. Aus ΔBDE ergiebt ſich mittels des rechtwinklig-gleichſchenkligen Dreiecks BCE die Seite BC des geſuchten Rechtecks, und in Folge deſſen auch Seite CD, ſo daß nun die Conſtruction gefunden iſt.

Conſtruction. Man zeichne einen $\angle B'ED = \frac{1}{2}R$; mache den einen Schenkel $ED = s$; ſchneide aus dem Endpunkte D mit $DB = e$ den andern Schenkel in B oder B'; fälle aus dieſen Punkten die Lothe BC und B'A' auf CD (oder errichte auf BE, reſp. B'E, in dem Halbirungspunkte F, reſp. F', ein Loth FC, reſp. F'A', bis zur DE); errichte auf DC in D ein Loth $DA = CB$ (reſp. Loth $DC' = A'B'$); und verbinde A mit B

Digitized by Google

(resp. C′ mit B′): so ist ABCD, resp. A′B′C′D, das gesuchte Rechteck. Die beiden genannten Rechtecke sind congruent.

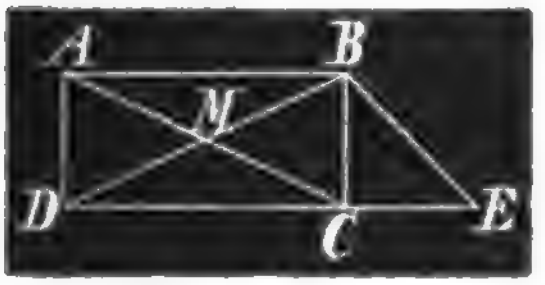
146. Aufgabe. Gegeben: $a - b = d$; e.



Analysis. In dem Rechteck ABCD sei $DC - CB = DC - CE = DE = d$ und $BD = e$. Man ziehe BE, so ist Winkel $BEC = \frac{1}{2}R$, mithin $\angle BED = 1\frac{1}{2}R$ und daher ΔBDE construirbar. Aus diesem Dreieck ergiebt sich das gesuchte Rechteck.

Construction. Man construire aus zwei Seiten $BD = e$ und $DE = d$ und dem der größeren Seite BD gegenüberliegenden Winkel $BED = 1\frac{1}{2}R$ ein ΔBDE; verlängere DE über E; fälle auf diese Verlängerung aus B ein Loth BC; errichte auf CD in D ein Loth $DA = CB$; und verbinde A mit B: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

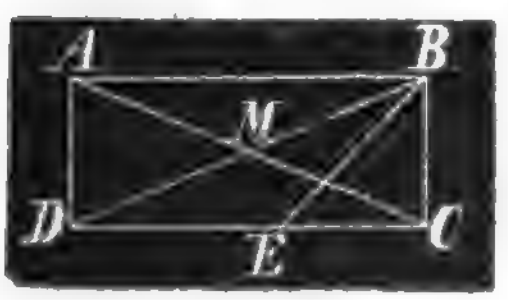
147. Aufgabe. Gegeben: $a + b = s$: der von den Diagonalen gebildete Winkel φ, welcher der Seite a gegenüberliegt.



Analysis. In dem Rechteck ABCD sei $DC + CB = DC + CE = DE = s$ und $\angle CMD = \varphi$. Man ziehe BE, so ist $\angle BED = \frac{1}{2}R = \angle EBC$. Da $\angle CMD = \varphi$ ist, so findet sich in dem gleichschenkligen Dreieck MBC Basiswinkel $CBM = \frac{1}{2}\varphi$. Mithin ist $\angle DBE = \angle BEC + \angle CBD = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\varphi$, und daher ΔBDE construirbar, aus welchem letzteren sich das gesuchte Rechteck ergiebt.

Construction. Man construire aus $DE = s$, dem anliegenden Winkel $DEB = \frac{1}{2}R$ und dem gegenüberliegenden Winkel $EBD = \frac{1}{2}(R + \varphi)$ ein ΔBDE; fälle aus B auf DE ein Loth BC; errichte auf DE in D ein Loth $DA = CB$; und verbinde A mit B: so ist ABCD das gesuchte Rechteck.

148. Aufgabe. Gegeben: $a - b = d$; φ.



Analysis. In dem Rechteck ABCD sei $CD - BC = CD - CE = DE$ und $\angle CMD = \varphi$. Man ziehe BE, so ist $\angle BEC = \frac{1}{2}R$, daher $\angle BED = 1\frac{1}{2}R$. Ferner ist in dem gleichschenkligen Dreieck

Digitized by Google

MCD Baſiswinkel CDM = R − ½ φ. Daher Δ BDE, aus dem ſich das geſuchte Rechteck ergiebt, conſtruirbar.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = d und den beiden anliegenden Winkeln BED = 1½ R und BDE = R − ½ φ ein Δ BDE; verlängere DE über E; fälle auf dieſe Verlängerung aus B ein Loth BC; errichte auf CD in D ein Loth DA = CB; und verbinde A mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Rechteck.

149. Aufgabe. Gegeben: a + b = s; ∠ (ae) = γ.

Conſtruction. (Fig. der 147. Aufg.) Man conſtruire aus DE = a + b = s und den beiden anliegenden Winkeln BDE = γ und BED = ½ R ein Δ BCD; fälle aus B auf DE ein Loth BC; errichte auf DE in D ein Loth DA = BC; und verbinde A mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Rechteck.

150. Aufgabe. Gegeben: a − b = d; ∠ (ae) = γ.

Conſtruction. (Figur der 148. Aufg.) Man conſtruire aus DE = d und den beiden anliegenden Winkeln BDE = γ und BED = 1½ R ein Δ BDE, und verfahre ſodann wie in Aufgabe 148.

c. Der Rhombus.

151. Aufgabe. Gegeben: die Seite = a und ein Winkel A.

Conſtruction. Man conſtruire aus a, als Schenkel, und A, als Winkel an der Spitze ein gleichſchenkliges Dreieck, und über der Baſis nach der andern Seite ein ihm congruentes Dreieck, ſo ertſteht der geſuchte Rhombus.

152. Aufgabe. Gegeben: Seite a und eine Diagonale e.

Conſtruction. Man conſtruire aus e, als Baſis, und a, als Schenkel, ein gleichſchenkliges Dreieck nach beiden Seiten der Baſis e: ſo entſteht der geſuchte Rhombus.

153. Aufgabe. Gegeben: e und A.

Conſtruction. Man conſtruire über e, als Baſis, nach beiden Seiten ein gleichſchenkliges Dreieck, deſſen Baſiswinkel = ½ A iſt. (Die Winkel eines gleichſeitigen Parallelogramms werden durch die Diagonalen halbirt.)

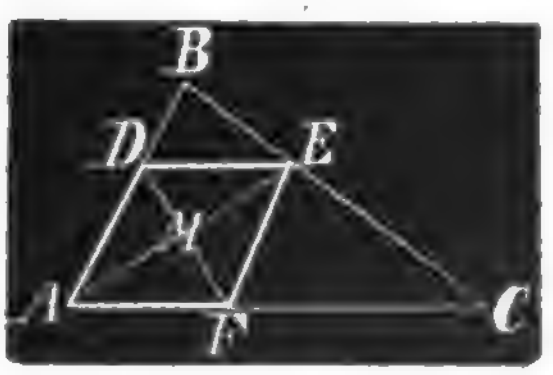
154. Aufgabe. Gegeben: die beiden Diagonalen e und e'.

Conſtruction. Man zeichne zwei ſich rechtwinklig ſchneidende Linien, trage aus dem Schnittpunkte nach beiden Rich-

Digitized by Google

tungen hin auf der einen eine Strecke $= \frac{e}{2}$, auf der andern eine Strecke $= \frac{e'}{2}$ ab, und verbinde die Endpunkte dieser Strecken unter sich: so ist das entstehende Viereck der gesuchte Rhombus. (Die Diagonalen eines gleichseitigen Parallelogramms schneiden sich rechtwinklig.)

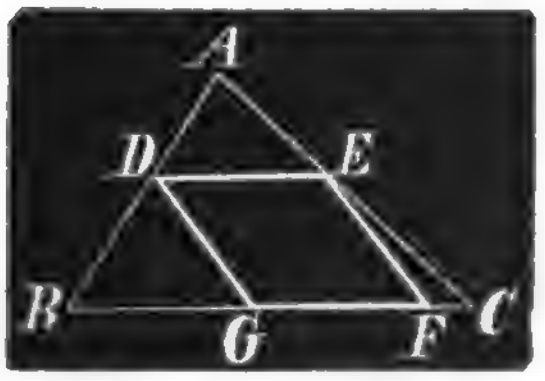
155. Aufgabe. In ein gegebenes Δ ABC einen Rhombus ADEF zu beschreiben, daß derselbe einen $\angle$ A mit dem Dreieck gemeinsam hat.



Construction. Man halbire Winkel BAC durch die zur BC gehende Gerade AE, lege durch den Halbirungspunkt M der Linie AE rechtwinklig eine Gerade DF bis an die Dreiecksseiten AB und AC, und verbinde E mit D und F: so ist das Viereck ADEF ein Rhombus.

Beweis. Δ DMA $\cong \Delta$ DME, daher DA $=$ DE; Δ EMD $\cong \Delta$ EMF, daher DE $=$ EF; Δ FME $\cong \Delta$ FMA, daher EF $=$ AF. Mithin ist AD $=$ DE $=$ EF $=$ FA.

156. Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck ABC einen Rhombus DEFG zu beschreiben, daß eine Seite (FG) des Rhombus auf eine Seite (BC) des Dreiecks, und ein Eckpunkt des Rhombus auf einen in einer andern Seite (AB) des Dreiecks gegebenen Punkt D fällt.



Construction. Man ziehe aus D bis zur AC eine Linie DE $\parallel$ BC; schneide aus D mit DE die BC in G; und ziehe aus E bis zur BC eine Gerade EF $\parallel$ DG: so ist DEFG ein Rhombus.

157. Aufgabe. In ein Rechteck einen Rhombus zu beschreiben.

Construction. Man verbinde die Halbirungspunkte je zweier zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks, so schließen die Verbindungslinien einen Rhombus ein.

158. Aufgabe. In ein gleichschenkliges Trapez einen Rhombus zu beschreiben.

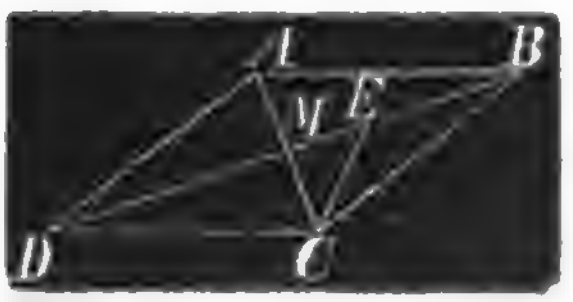
Google

Conſtruction. Man verbinde die Halbirungspunkte je zweier zuſammenſtoßenden Seiten des Trapezes, ſo ſchließen die Verbindungslinien einen Rhombus ein.

159. Aufgabe. In einen Rhombus ein Rechteck zu beſchreiben.

Conſtruction. Man verbinde die Halbirungspunkte je zweier zuſammenſtoßenden Seiten des Rhombus, ſo entſteht ein Rechteck.

160. Aufgabe. Gegeben: Seite a und die Summe der beiden Diagonalen $e + e' = s_e$.



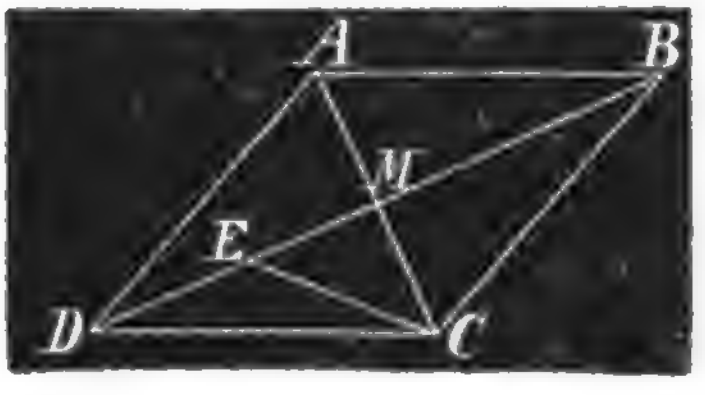
Analyſis. Es ſei im Rhombus ABCD die Seite $CD = a$, und die Summe der Diagonalen $AC + BD = e + e' = s_e$, ſo iſt $DM + MC = \frac{1}{2} s_e$. Man mache $ME = MC$, ſo iſt $DM + ME = DE = \frac{1}{2} s_e$. Wird C mit E verbunden, ſo findet ſich im rechtwinklig-gleichſchenkligen Δ MCE der Winkel $MEC = \frac{1}{2} R$. Daher iſt Δ DCE conſtruirbar. Aus dieſem Dreieck ergiebt ſich der geſuchte Rhombus.

Conſtruction. Man conſtruire aus $DE = \frac{1}{2} s_e$ und $CD = a$ und dem der kleineren Seite CD gegenüberliegenden Winkel $DEC = \frac{1}{2} R$ ein Δ DEC; fälle aus C auf DE ein Loth CM; verlängere CM über M und mache die Verlängerung $MA = MC$; verlängere dann DE über E, bis $MB = MD$ wird; und verbinde A mit B und D, wie auch B mit C: ſo iſt ABCD der geſuchte Rhombus.

Der Punkt C kann aber auch in die Verlängerung der AC über C fallen, ſo daß ſich ein zweites Hülfsdreieck ergiebt, und mit ihm ein anderer Rhombus, der jedoch dem Rhombus ABCD congruent iſt.

Determination. Iſt $s^2 = 8a^2$ gegeben, ſo wird ABCD ein Quadrat. Die Aufgabe iſt unmöglich, wenn man $s^2 > 8a^2$ hat.

161. Aufgabe. Gegeben: a und $e' - e = d_e$.



Analyſis. In dem Rhombus ABCD ſei $CD = a$ und $MD - MC = MD - ME = DE = \frac{1}{2} d_e$. Man ziehe CE, ſo iſt $\angle MEC = \frac{1}{2} R$, mithin Winkel $DEC = 1\frac{1}{2} R$; folglich Dreieck

Digitized by Google

CED construirbar. Aus diesem Dreieck ergiebt sich der gesuchte Rhombus.

Construction. Man construire aus $CD = a$, $DE = \frac{1}{2} d$, und dem der größeren Seite CD gegenüberliegenden Winkel $CED = 1\frac{1}{2} R$ ein ΔEDC; verlängere DE über E; fälle auf diese Verlängerung aus C ein Loth CM; verlängere CM über M um sich selbst; mache $MB = MD$; und verbinde B mit C, wie auch A mit B und D: so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Determination. Ist $d^2 \geqq 8a^2$, so ist die Aufgabe unmöglich.

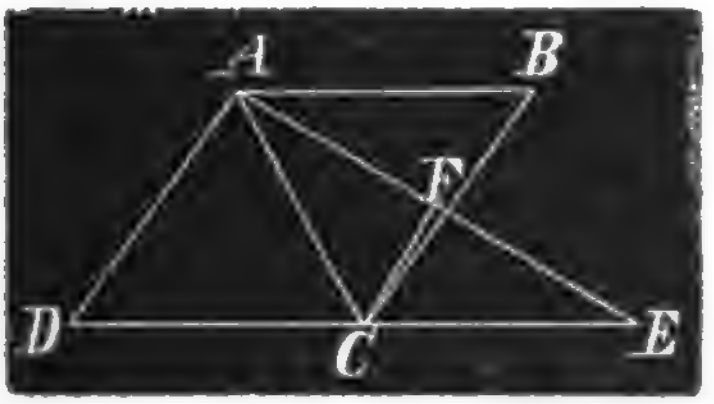
162. Aufgabe. Gegeben ein Winkel $= D$ und $e + e' = s$.

Construction. (Figur der **160.** Aufg.) Man construire aus $DE = \frac{1}{2} s$, und den beiden anliegenden Winkeln $DEC = \frac{1}{2} R$ und $EDC = \frac{1}{2} D$ ein ΔDEC, und verfahre alsdann wie in Aufgabe **160.**

163. Aufgabe. Gegeben: D, $e' - e = d$.

Construction. (Figur der **161.** Aufg.) Man construire aus $DE = \frac{1}{2} d$, und den beiden anliegenden Winkeln $DEC = 1\frac{1}{2} R$ und $EDC = \frac{1}{2} D$ ein ΔEDC, und verfahre alsdann wie in Aufgabe **161.**

164. Aufgabe. Gegeben: A; $a + e = s$.

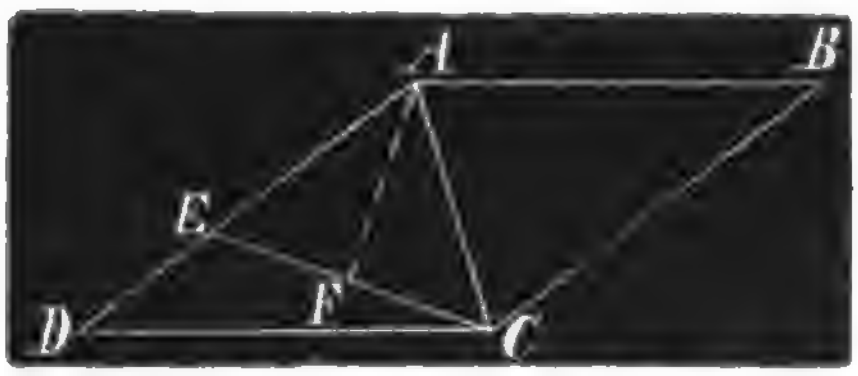


Analysis. In dem Rhombus ABCD sei $CD + AC = DC + CE = DE = a + e = s$ und $\angle BAD = A$. Man ziehe AE, so ist, weil $\angle DCA = \angle DAC = \frac{1}{2} A$ gegeben ist, $\angle ACE = 2R - \frac{1}{2} A$, mithin in dem gleichschenkligen ΔCAE Basiswinkel $CAE = \frac{1}{4} A$, folglich $\angle DAC + CAE = \frac{3}{4} A$, während $\angle CEA = CAE = \frac{1}{4} A$. Demgemäß ist ΔADE, aus dem sich der gesuchte Rhombus ergiebt, construirbar.

Construction. Man construire aus $DE = a + e = s$ und den Winkeln $AED = \frac{1}{4} A$ und $ADE = 2R - A$ (oder $\angle DAE = \frac{3}{4} A$) ein ΔADE; errichte auf AE im Halbirungspunkte F ein Loth FC bis zur DE; ziehe aus C eine Gerade CB gleich und parallel DA; und verbinde A mit B: so ist ABCD der gesuchte Rhombus.

Digitized by Google

165. Aufgabe. Gegeben: $a - e = d$; A.



Analyſis. In dem Rhombus ABCD ſei $AD - AC = AD - AE = DE = d$ und $\angle BAD = A$. Man ziehe EC, ſo findet ſich, weil Winkel $BAD = A$ gegeben iſt, $\angle CAD = \frac{1}{2} A$, daher $\angle AEC = \angle ACE = \frac{1}{4} A$ und $\angle CED = 1\frac{3}{4} A$, während $\angle ADC = 2R - A$ iſt. Folglich kann das Hülfsdreieck EDC conſtruirt werden.

Conſtruction. Man conſtruire aus einer Seite $DE = d$ und den beiden anliegenden Winkeln $EDC = 2R - A$ und $DEC = 1\frac{3}{4} A$ ein ΔEDC; verlängere DE über E; errichte auf CE im Halbirungspunkte F ein Loth FA bis zum Schnittpunkte A mit der Verlängerung von DE; ziehe $CB \parallel DA$; mache $CB = DA$; und verbinde B mit A: ſo iſt ABCD der geſuchte Rhombus.

d. Parallelogramme im Allgemeinen.

166. Aufgabe. Gegeben: zwei Seiten a, b und $\angle(ab) = A$.

Conſtruction. Man conſtruire aus a und b und dem von dieſen Seiten eingeſchloſſenenen Winkel A ein Dreieck, und ergänze letzteres zum Parallelogramm.

167. Aufgabe. Gegeben: a, b, e.

Conſtruction. Man conſtruire über der gegebenen Diagonale e, als Grundliuie, nach beiden Seiten mit a und b congruente Dreiecke, ſo daß die gleichen Seiten einander gegenüberliegen.

168. Aufgabe. Gegeben: a, e, A.

Conſtruction. Man conſtruire aus e und a, als Seiten, und dem der größeren Seite e gegenüberliegenden Winkel A ein Dreieck, und ergänze letzteres zum Parallelogramm.

169. Aufgabe. Gegeben: a, e, e'.

Conſtruction. Man conſtruire aus drei Seiten a, $\frac{1}{2}$ e und $\frac{1}{2}$ e' ein Dreieck; verlängere $\frac{1}{2}$ e und $\frac{1}{2}$ e' über den gemeinſamen Schnittpunkt um ſich ſelbſt; verbinde die erhaltenen Endpunkte unter ſich und mit den Endpunkten der Seite a: ſo entſteht das geſuchte Parallelogramm.

170. Aufgabe. Gegeben: e, e', ∠(ae').

Construction. Man construire aus $\frac{e}{2}$ und $\frac{e'}{2}$, als Seiten, und dem der Seite $\frac{e}{2}$ gegenüberliegenden Winkel, der von a und e' gebildet wird, ein Dreieck, und verfahre alsdann wie in Aufgabe 169.

171. Aufgabe. Gegeben: e, e' und der (spitze) Winkel φ der Diagonalen.

Construction. Man construire aus $\frac{e}{2}$ und $\frac{e'}{2}$, als Seiten, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel φ ein Dreieck, und verfahre alsdann wie in Aufgabe 169.

172. Aufgabe. Gegeben: a, ∠(ae'), φ.

Construction. Man construire aus a, als Seite, dem anliegenden Winkel (ae'), der von den Seite a und der Diagonale e' gebildet wird, und dem gegenüberliegenden ∠φ ein Dreieck, und verfahre alsdann wie in Aufgabe 169.

173. Aufgabe. Gegeben: a, e', φ.

Construction. Man construire aus a und $\frac{1}{2}$e', als Seiten, und dem der Seite a gegenüberliegenden Winkel φ ein Dreieck, und verfahre dann wie in Aufgabe 169.

174. Aufgabe. Gegeben: a, b, Höhe h_b auf b.

Construction. Man errichte auf CD = b in einem beliebigen Punkte E ein Loth EA = h_b; lege durch A eine unbegränzte Gerade AB ∥ DC; schneide aus D mit AD = a die Linie AB in einem Punkte A; und ziehe aus C eine Gerade CB ∥ DA bis an die AB: so ist ABCD das gesuchte Parallelogramm.

Die Strecke AB in der oberen Parallele kann auch mehr zur Linken zu liegen kommen, wodurch ein zweites Parallelogramm entsteht, das aber dem ersteren congruent ist.

175. Aufgabe. Gegeben: b, h_b, e.

Construction. (Die vorige Figur.) Man construire aus AE = h_b, als Kathete, und AC = e, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck ACE; verlängere CE über E, bis CD = b wird; verbinde D mit A; ziehe aus C eine Gerade CB, parallel und gleich DA; und verbinde A mit B: so ist ABCD das

Digitized by Google

rallele AB; ſchneide aus A auf der letzteren eine Strecke AB = DC ab (oder lege durch C eine Gerade CB ∥ DA bis zum Schnittpunkte B mit der oberen Parallele); ſo iſt ABCD das geſuchte Parallelogramm. Die Lage desſelben kann auch eine andere ſein.

179. Aufgabe. Gegeben: b, h_a, $\angle(ae) = \gamma$.

Conſtruction. (Figur der 174. Aufg.) Man conſtruire aus AD = b, als Hypotenuſe, und AE = h_a, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck ADE; verlängere DE über E; trage an AE im Punkte A einen $\angle EAC = R - \gamma$ an, ſo daß der Schenkel AC die Verlängerung der Kathete DE in C ſchneidet; ziehe CB parallel und gleich DA; und verbinde B mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Parallelogramm, $\angle ACD = \angle CAB = \gamma$. Die Lage dieſes Parallelogramms kann auch eine andere ſein.

180. Aufgabe. In ein beliebiges Viereck ein Parallelogramm zu beſchreiben.

Conſtruction. Man verbinde die Halbirungspunkte je zweier zuſammenſtoßenden Seiten durch gerade Linien, ſo ſchließen letztere ein Parallelogramm ein.

---

6. Conſtruction der Trapeze.

a. Das gleichſchenklige Trapez.

Bezeichnung:

a iſt die größere Parallele.
c iſt die kleinere Parallele.
b iſt der Schenkel.
e iſt die Diagonale.
h iſt der ſenkrechte Abſtand der Parallelen.
α iſt der ſpitze Winkel, unter dem ſich die Diagonalen ſchneiden.
β iſt der Winkel, den die Diagonale mit jeder der parallelen Seiten bildet.
A iſt der Winkel (des Trapezes) an der größeren Parallele.
D iſt der Winkel (des Trapezes) an der kleineren Parallele.

181. Aufgabe. Gegeben: a, b, c.

Analyſis. In dem gleichſchenkligen Trapez ABCD ſei AB = a, CD = c und AD = BC = b. Man ſchneide auf

Digitized by Google

rallele DC zu BA; ſchneide aus B mit BC = AD die Parallele DC in C; und ziehe zuletzt die Gerade BC: ſo iſt das geſuchte gleichſchenklige Trapez ABCD conſtruirt.

185. Aufgabe. Gegeben: e, h, A.

Conſtruction. (Die vorige Figur.) Man conſtruire aus DF = h, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel FDA = R — A ein rechtwinkliges Dreieck DAF; verlängere AF, und ſchneide aus D mit DB = e dieſe Verlängerung in einem Punkte B; lege durch D eine Parallele DC zu AB; ſchneide aus B mit BC = AD die Parallele DC in C; und ziehe zuletzt BC: ſo iſt das gleichſchenklige Trapez ABCD den Bedingungen der Aufgabe gemäß.

186. Aufgabe. Gegeben: a, h, α.

Conſtruction. (Figur der 184. Aufg.) Man conſtruire aus AB = a, als Baſis, und $\angle MAB = \frac{\alpha}{2}$, als Baſiswinkel, ein gleichſchenkliges Dreieck MAB; verbinde den Halbirungspunkt G der Baſis AB mit der Spitze M; verlängere GM über M, bis GE = h wird; lege durch E eine Parallele DC zu AB; verlängere die gleichen Seiten des gleichſchenkligen Dreiecks MAB über M bis an die Parallele DC, wodurch die Schnittpunkte D und C gefunden werden; und ziehe zuletzt AD und BC: ſo iſt ABCD das geſuchte gleichſchenklige Trapez.

187. Aufgabe. Gegeben: a, b, α.

Conſtruction. (Dieſelbe Figur.) Man conſtruire aus AB = a, als Baſis, und $\angle MAB = \frac{\alpha}{2}$, als Baſiswinkel, ein gleichſchenkliges Dreieck MAB; verlängere die Schenkel über M; ſchneide aus A und B mit AD = BC = b dieſe Verlängerungen in den Punkten D und C; und ziehe zuletzt AD und BC: ſo iſt das gleichſchenklige Trapez ABCD den Bedingungen der Aufgabe gemäß.

188. Aufgabe. Gegeben: b, e, β.

Conſtruction. (Dieſelbe Figur.) Man trage an AC = e in den Punkten A und C nach entgegengeſetzten Seiten $\angle CAB = \angle ACD = \beta$ an; ſchneide aus A und C mit AD = b die Schenkel AB und CD in den Punkten B und D; und ziehe BC und AD: ſo iſt ABCD das geſuchte gleichſchenklige Trapez.

Digitized by Google

AB; und ſchneide die DC aus B mit BC = b: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

195. Aufgabe. Gegeben: a, d, A, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und dem eingeſchloſſenen Winkel BAD = A ein Δ ABD; trage an AB im Punkte B einen Winkel ABC = B an mit gehörig verlängertem Schenkel BC; und lege durch D eine Parallele DC zu AB: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

196. Aufgabe. Gegeben: a, d, c, e.

Conſtruction. Mann conſtruire aus AD = d, CD = c und AC = e ein Δ ACD; ziehe AB = a parallel mit DC; und verbinde B mit C: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

197. Aufgabe. Gegeben: a, c, e, A.

Conſtruction. Man conſtruire aus CD = c, AC = e und dem der größeren Seite AC = e gegenüberliegenden Winkel ADC = 2 R − A ein Δ ACD; ziehe AB = a parallel mit DC; und verbinde B mit C: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

198. Aufgabe. Gegeben: a, c, e, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AC = e und dem der kleineren Seite AC = e gegenüberliegenden Winkel ABC = B ein Δ ABC (zwei Fälle); ziehe CD = c parallel mit BA; und verbinde D mit A: ſo iſt ABCD das eine der beiden Trapeze, welche den Bedingungen der Aufgabe entſprechen. Wenn aber ∠ ACB = R wird, ſo iſt nur ein Trapez möglich.

199. Aufgabe. Gegeben: a, d, e', C.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und BD = e' ein Δ ABD; trage an AB in B einen Winkel ABC = 2 R − C an mit gehörig verlängertem Schenkel BC; und lege durch D eine Parallele DC zu AB: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

200. Aufgabe. Gegeben: b, d, e, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = b, AC = e und dem der größeren Seite AC = e gegenüberliegenden Winkel ABC = B ein Δ ABC; lege durch C eine Gerade CD ∥ BA; und ſchneide aus A mit AD = b die Parallele CD im Punkte D: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

201. Aufgabe. Gegeben: a, e, A, B.

Digitized by Google

Construction. Man construire aus AB = a, AC = e und dem der kleineren Seite AC = e gegenüberliegenden Winkel ABC = B ein Δ ABC; ziehe CD ‖ BA; trage an AB in A einen ∠ BAD = A an; und verlängere den Schenkel AD bis an die Parallele CD ꝛc. (Zwei Fälle.)

202. Aufgabe. Gegeben: a, e, e', A.

Construction. Man construire aus AB = a, BD = e' und dem der Seite BD = e' gegenüberliegenden Winkel BAD = A ein Δ ABD; ziehe durch D eine Gerade DC ‖ AB; schneide aus A mit AC = e die Parallele DC in C; und verbinde B mit C: so ist das Trapez ABCD den Bedingungen der Aufgabe gemäß. (Ein zweites Trapez ist möglich.)

203. Aufgabe. Gegeben: β, a, b, d.

Construction. Man construire aus AB = a, BC = b und dem der Seite BC = b gegenüberliegende Winkel BAC = β ein Δ ABC (zwei Fälle); ziehe aus C eine Gerade CD ‖ BA, und schneide die Parallele CD aus A mit AD = d im Punkte D: so entspricht das Trapez ABCD den Bedingungen der Aufgabe.

204. Aufgabe. Gegeben: β, a, d, e.

Construction. Man construire aus AB = a, AC = e und dem eingeschlossenen Winkel BAC = β ein Δ ABC; lege durch C eine Parallele CD zu BA; und schneide aus A mit AD = d die Parallele CD in D: so ist ABCD das gesuchte Trapez.

205. Aufgabe. Gegeben: β, a, d, e'.

Construction. Man construire aus AB = a, AD = d und BD = e' ein Δ ABD; ziehe aus D eine Gerade DC ‖ AB; trage an AB in A einen Winkel BAC = β an; verlängere den Schenkel AC bis zum Schnittpunkte C mit der Parallele BC; und verbinde C mit B: so ist ABCD das gesuchte Trapez.

206. Aufgabe. Gegeben: β, a, e, e'.

Construction. Δ ABC aus AB = a, AC = e und dem eingeschlossenen Winkel BAC = β. Dann ziehe man CD ‖ BA; schneide aus B mit BD = e' die CD in D; und verbinde D mit A: so ist ABCD das gesuchte Trapez.

207. Aufgabe. Gegeben: β, A, a, d.

Construction. Δ ABD aus AB = a, AD = d und dem eingeschlossenen Winkel BAD = A. Dann ziehe man DC ‖ AB; trage an AB in A einen ∠ BAC = β an; verlängere den Schen-

Digitized by Google

kel AC bis zum Schnittpunkte C mit der DC; und verbinde C mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

208. Aufgabe. Gegeben: β, A, a, b.

Conſtruction. Δ ABC aus AB = a, BC = b und dem der Seite BC = b gegenüberliegenden Winkel BAC = β. Dann ziehe man CD ‖ BA, und trage an AB im Punkte A einen ∠ BAD = A an u. ſ. f.

209. Aufgabe. Gegeben: β, A, a, e.

Conſtruction. Δ ABC aus a, e und β. Dann trage man an AB im Punkte A einen ∠ BAD = A an u. ſ. w.

210. Aufgabe. Gegeben: B, A, d, e.

Conſtruction. Δ ADC aus AD = d, AC = e und dem der AC = e gegenüberliegenden Winkel ADC = 2 R — A. Dann trage man an DC in C einen ∠ DCB = 2 R — B an; ziehe aus A eine Gerade AB ‖ DC ꝛc.

211. Aufgabe. Gegeben: β, B, a, c.

Conſtruction. Δ ABC aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln BAC = β und ABC = B. Dann ziehe man aus C eine Gerade CD = c parallel mit BA; und verbinde D mit A ꝛc.

212. Aufgabe. Gegeben: β, B, a, d.

Conſtruction des Dreiecks ABC und Beſtimmung des Schnittpunktes D der Parallele CD und der Seite AD = d ꝛc.

213. Aufgabe. Gegeben: β, D, a, e.

Conſtruction. Δ ABC aus a, e und β. Dann trage man an AB in A einen ∠ BAD = 2 R — D an; ziehe CD ‖ BA ꝛc.

214. Aufgabe. Gegeben: β, b, d, e.

Conſtruction. Δ ABC aus β, e und b. Dann ziehe man CD ‖ BA und ſchneide aus A mit AD = d die CD in D ꝛc.

215. Aufgabe. Gegeben: β, B, e, e′.

Conſtruction. Δ ABC aus e, β und B. Dann ziehe man CD ‖ BA und ſchneide aus B mit BD = e′ die CD in D ꝛc.

216. Aufgabe. Gegeben: β, A, B, a.

Conſtruction. Δ ABC aus a, β, B. Dann ziehe man CD ‖ BA, und trage an AB = a im Punkte A einen Winkel BAD = A an ꝛc.

217. Aufgabe. Gegeben: β, A, B, d.

Conſtruction. Man conſtruire aus AD = d, dem anliegenden Winkel ADC = 2 R — A und dem gegenüberliegenden

Digitized by Google

Winkel ACD = CAB = β ein Δ ACD; ziehe AB || DC und trage an CD im Punkte C einen ∠ DCB = 2 R — B an ꝛc.

218. Aufgabe. Gegeben: γ, A, B, e'.

Conſtruction. Δ ABD aus BD = e', dem anliegenden ∠ DBA = γ und dem gegenüberliegenden ∠ DAB = A. Dann ziehe man aus D eine Gerade DC || AB; und trage an AB im Punkte B einen ∠ ABC = B an ꝛc.

219. Aufgabe. Gegeben: α, β, a, d.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, dem anliegenden ∠ BAM = β und dem gegenüberliegenden ∠ AMB = 2 R — α ein Δ MAB; verlängere die Seiten AM und BM über M; ſchneide aus A mit AD = d die Verlängerung der BM in D; und ziehe DC || AB bis an die Verlängerung der AM ꝛc.

220. Aufgabe. Gegeben: α, β, a, e.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, dem anliegenden ∠ BAM = β und dem gegenüberliegenden ∠ AMB = 2 R — α ein Δ MAB; verlängere AM über M, ſo daß AC = e wird; ziehe aus C eine Parallele CD zu BA; verlängere BM über M bis an die Parallele CD; und verbinde D mit A, wie auch C mit B ꝛc.

221. Aufgabe. Gegeben: α, β, A, d.

Conſtruction. (Da ∠ MAB = β und ∠ AMB = 2 R — α iſt, ſo findet ſich ∠ ABM = α — β.) Man conſtruire aus AD = d, dem anliegenden ∠ BAD = A und dem gegenüberliegenden ∠ ABD = α — β ein Δ DAB; ziehe aus D eine Gerade BC parallel mit AB; trage an AB im Punkte A einen ∠ BAC = β an ꝛc.

222. Aufgabe. Gegeben: α, β, A, a.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln DAB = A und ABD = α — β ein Δ MAB; verlängere die Seiten AM und BM über M; trage an AB im Punkte A einen ∠ DAB = A an; verlängere den Schenkel AD bis zum Schnittpunkte D mit der Verlängerung von BM; ziehe aus D eine Gerade DC || AB bis zum Schnittpunkte C mit der Verlängerung von AM ꝛc.

223. Aufgabe. Gegeben: h, a, d, c.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck DAE;

Digitized by Google

verlängere AE über E, bis AB = a wird; ziehe aus D eine Gerade DC = c parallel mit AB; und verbinde C mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

224. Aufgabe. Gegeben: h, a, c, e.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h und CD = c, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck CDE; lege durch E eine Gerade AB || DC; ſchneide aus C mit AC = e vorerwähnte Gerade im Punkte A; mache die Strecke AB = a; und verbinde C mit B ꝛc.

225. Aufgabe. Gegeben: h, a, c, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus CD = c und DE = h ein rechtwinkliges Δ CDE; lege durch E eine Gerade AB || DC; trage an CD in C einen ∠ DCA = β an und verlängere den Schenkel CA bis an die Parallele AB; ſchneide aus A eine Strecke AB = a auf der letzteren ab; und verbinde A mit D, wie auch B mit C: ſo iſt ABCD das geſuchte Trapez.

226. Aufgabe. Gegeben: h, a, b, d.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Δ DAE; verlängere AE über E, und mache AB = a; ziehe aus D eine Gerade DC parallel AB, und ſchneide aus B mit BC = b die Gerade DC in C ꝛc.

227. Aufgabe. Gegeben: h, a, d, e.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck DAE; verlängere AE über E, und mache AB = a; ziehe aus D eine Gerade DC || AB, und ſchneide die DC aus A mit AC = e im Punkte C; verbinde C mit B ꝛc.

228. Aufgabe. Gegeben: h, a, d, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck DAE, verlängere AE über E, und mache AB = a; lege durch D eine Gerade DC || AB; trage an AB = a im Punkte B einen Winkel ABC = B an ꝛc.

229. Aufgabe. Gegeben: h, a, d, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck DAE; verlängere AE über E bis B, ſo daß AB = a iſt; verbinde

Digitized by Google

B mit D; lege durch D eine zu AB parallele Gerade DC; trage an AB in A einen $\angle BAC = \beta$ an ꝛc.

230. Aufgabe. Gegeben: h, b, d, e.

Conſtruction. Man conſtruire aus $DE = h$, als Kathete, und $AD = d$, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Dreieck DAE; verlängere AE über E; lege durch D eine Gerade $DC \parallel AB$ und ſchneide die DC aus A mit $AC = e$ im Punkte C; ſchneide ſodann aus C mit $CB = d$ die Verlängerung der AE im Punkte B ꝛc.

231. Aufgabe. Gegeben: h, a, e, e'.

Conſtruction. Man ziehe zwei Parallelen AB und DC, deren Abſtand $DE = h$ iſt; mache $AB = a$; ſchneide die Parallele DC aus A mit $AC = e$ im Punkte C, wie auch aus B mit $BD = e'$ im Punkte D; und ziehe zuletzt DA und CB ꝛc.

232. Aufgabe. Gegeben: h, e, e', A.

Conſtruction. Man conſtruire aus $DE = h$, als Kathete, und dem anliegenden ſpitzen Winkel $ADE = R - A$ ein rechtwinkliges ΔDAE; verlängere AE über E; lege durch D eine Gerade $DC \parallel AE$; ſchneide die DC aus A mit $AC = e$ im Punkte C, ſodann die verlängerte AE aus D mit $DB = e'$ im Punkte B ꝛc.

233. Aufgabe. Gegeben: h, a, α, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = a$ und den beiden anliegenden Winkeln $MAB = \beta$ und $ABM = \alpha - \beta$ ein ΔMAB; errichte auf $AB = a$ in einem beliebigen Punkte E ein Loth $ED = h$; lege durch D eine Gerade DC parallel mit AB; verlängere die Seiten AM und BM des Dreiecks MAB über M bis zu den Schnittpunkten C und D in der Parallele DC; und ziehe zuletzt AD und BC ꝛc.

Man kann aber auch von dem rechtwinkligen ΔDEB ausgehen, in welchem die Kathete $DE = h$ und der gegenüberliegende ſpitze Winkel $EBD = \alpha - \beta$ gegeben iſt; alsdann BE über E verlängern und $BA = a$ machen; A mit D verbinden; aus D eine Gerade $DC \parallel AB$ ziehen; und an AB in A einen $\angle CAB$ antragen ꝛc.

234. Aufgabe. Gegeben: h, d, B, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus $DE = h$, als Kathete, und $AD = d$, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges ΔDAE; ver-

Digitized by Google

längere AE über E; lege durch D parallel zu AE eine Gerade DC; trage an AE in A einen Winkel CAE = β an, und verlängere den Schenkel AC bis zum Schnittpunkte C mit der Parallele DC; trage an DC in C einen ∠ DCB = 2 R — B an, und verlängere den Schenkel CB bis zum Schnittpunkte B in der Parallele AB ꝛc.

235. Aufgabe. Gegeben: h, d, α, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus DE = h, als Kathete, und AD = d, als Hypotenuſe, ein rechtwinkliges Δ DAE; verlängere AE über E; trage an DE = h in D einen ∠ EDB = R — (α — β) = R + β — α an; verlängere den Schenkel DB bis zum Schnittpunkte B mit der verlängerten AE; lege durch D parallel mit AB eine Gerade DC; trage an AB in A einen ∠ BAC = β an; und verlängere den Schenkel AC bis an die Gerade DC ꝛc.

236. Aufgabe. Gegeben: h, A, B, β.

Conſtruction. Man ziehe zwei Parallelen AB und DC, deren Abſtand DE = h iſt; trage an AB in einem beliebigen Punkte A einen ∠ DAB = A und einen ∠ CAB = β an; verlängere die Schenkel AD und AC bis an die Parallele DC, wodurch die Strecke DC beſtimmt wird; trage an letztere in C einen ∠ DCB = 2 R — B an; und verlängere den Schenkel CB bis zum Schnittpunkte B mit der Parallele AB ꝛc.

237. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, d.

Conſtruction. Man conſtruire aus CG = DA = d, CB = b und GB = AB — AG = AB — DC = a — c ein Δ CGB; verlängere BG über G, bis BA = a iſt; ziehe aus C die Gerade CD = c parallel zu BA; und verbinde D mit A ꝛc.

238. Aufgabe. Gegeben: a, d, c, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus CG = d, GB = a — c und dem der Seite CG = d gegenüberliegenden ∠ GBC = B ein Δ CGB (zwei Fälle), verlängere BG über G und mache die Verlängerung GA = c, ziehe aus C die Gerade CD = c parallel zu AB; und verbinde D mit A ꝛc.

239. Aufgabe. Gegeben: a, b, A, B.

Conſtruction. Man trage an AB = a auf einerlei Seite im Punkte A den ∠ DAB = A, im Punkte B den ∠ ABC = B an; mache den Schenkel BC des letzteren Winkels = b; ziehe

Digitized by Google

Modern software systems are built from many components that must communicate reliably. Whether a client talks to a server, a microservice talks to another microservice, or a process talks to a database, the underlying mechanism is a network protocol. Protocols define the rules for how bytes are arranged, how errors are detected, and how the two sides agree on what to do next.

Despite their importance, protocols are often treated as black boxes. Developers call a library function and hope it works. When it does not work, debugging is difficult because the failure may be buried several layers below the application code. A deeper understanding of how protocols are designed and implemented can make the difference between a system that is fragile and one that is robust.

This book has three goals. First, it explains the core ideas behind reliable communication: framing, checksums, sequence numbers, acknowledgements, and retransmission. Second, it walks through the design of a small but realistic protocol called the Simple Reliable Protocol (SRP). Third, it provides a complete reference implementation in Python that you can read, run, and modify.

The reader is assumed to be comfortable with basic programming concepts such as functions, loops, and data structures. No prior knowledge of networking is required. Every new idea is introduced with a motivating example before any formal definition appears.

Each chapter builds on the previous one. The first four chapters cover theory and design. The remaining chapters implement the protocol piece by piece. Exercises appear at the end of every chapter; solutions are not provided, because the point is to think, not to copy.

Code examples are written in Python 3.11 and use only the standard library. Shell commands are shown with a leading `$` prompt. Filenames and identifiers appear in `monospace`. When a term is defined for the first time it is set in *italics*.

Analyſis. Es ſei in dem Trapez ABCD Seite AB = a, CD = c, Diagonale BD = e′ und ∠ AMD = α. Man verlängere AB = a um BE = c, und ziehe EC, ſo iſt BECD ein Parallelogramm, alſo EC ‖ BD. Da ∠ AMB = 2 R − α iſt, ſo findet ſich auch ∠ ACE = 2 R − α, womit das Δ CAE beſtimmt iſt, aus dem ſich das geſuchte Trapez ergiebt.

Conſtruction. Man conſtruire aus AE = a + c, CE = = BD = e′ und dem der größeren Seite AE = a + c gegenüberliegenden ∠ ACE = 2 R − α ein Δ CAE, und verfahre ſodann wie in Aufgabe 244.

246. Aufgabe. Gegeben: β, d, e, e′. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AC = e, CE = DB = e′ und dem der Seite CE = e′ gegenüberliegenden Winkel CAE = β ein Δ CAE; ziehe aus C eine Gerade CD ‖ EA, und ſchneide aus A mit AD = d vorerwähnte CD im Punkte D, wie auch aus D mit DB = e′ die Baſis AE in B; und ziehe zuletzt BC ꝛc.

247. Aufgabe. Gegeben: β, A, e, e′. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CAE aus AC = e, CE = DB = e′ und dem der CE = e′ gegenüberliegenden ∠ CAE = β. Hierauf ziehe man aus C eine Gerade CD ‖ EA, trage an EA im Punkte A einen Winkel DAE = A an, deſſen Schenkel AD die Parallele CD in D ſchneidet, trage aus E auf AE die Strecke EB = CD ab und verbinde B mit C ꝛc.

248. Aufgabe. Gegeben: α, β, d, e. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AC = e und den beiden anliegenden Winkeln CAE = β und ACE = AMB = 2 R − α ein Δ CAE; ziehe aus C eine Gerade CD ‖ EA, und ſchneide die CD aus A mit AD = d im Punkte D; trage aus E auf AE die Strecke EB = CD ab, und verbinde B mit C ꝛc.

249. Aufgabe. Gegeben: α, β, d, e′. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CAE aus EC = BD = e′, dem anliegenden Winkel ECA = ∠ BMA = 2 R − α und dem gegenüberliegenden Winkel CAE = β. Hierauf verfahre man wie in Aufgabe 246.

250. Aufgabe. Gegeben: α, β, A, e′. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CAE aus EC = e′ und den beiden Winkeln ECA = 2 R − α und CAE = β. Hierauf ziehe man CD

Digitized by Google

‖ EA, und trage an AE im Punkte A einen Winkel DAE = A an, deſſen Schenkel AD die CD im Punkte D ſchneidet ꝛc.

251. Aufgabe. Gegeben: a, e, e′, α. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CAE aus CA = e, CE = e′ und dem eingeſchloſſenen Winkel ACE = 2 R — α. Hierauf trage man aus A auf AE eine Strecke AB = a ab; ziehe aus C parallel mit EA eine Gerade CD = EA — AB = BE; und verbinde D mit A, wie auch C mit B ꝛc.

252. Aufgabe. Gegeben: (a + c), d, e, e′. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Δ CAE aus AE = (a + c), AC = e, und CE = e′. Hierauf ziehe man aus C parallel mit EA eine beliebige Gerade CD; ſchneide dieſelbe aus A mit AD = d in D; mache auf EA das Stück EB gleich der Strecke CD; und verbinde A mit D, wie auch B mit C ꝛc.

253. Aufgabe. Gegeben: (a + c), b, e, e′. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Δ CAE aus AE = (a + c), AC = e und CE = e′. Alsdann ſchneide man aus C mit CB = b die AE in B; ziehe aus C parallel zu EA die Gerade CD = EB; und verbinde D mit A ꝛc.

254. Aufgabe. Gegeben: a, c, A, B. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CFB aus FB = a — c und den beiden anliegenden Winkeln CFB = A und CBF = B. Hierauf verlängere man BF über F bis A, ſo daß AB = a wird; ziehe aus C parallel zu AB = a eine Gerade CD = c, und verbinde D mit A ꝛc.

255. Aufgabe. Gegeben: β, A, a, c. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ ACF aus AF = c und den beiden anliegenden Winkeln CAF = β und CFA = 2 R — A. Hierauf verlängere man AF über F bis B, ſo daß AB = a wird; ziehe aus C eine Gerade CD = c parallel zu EA; und verbinde D mit A, wie auch C mit B ꝛc.

256. Aufgabe. Gegeben: α, β, a, c. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Δ CAE aus AE = a + c, dem anliegenden Winkel CAE = β und dem gegenüberliegenden Winkel ACE = 2 R — α. Hierauf ziehe man aus C eine Gerade CD = c parallel mit EA, und verbinde D mit A; ſchneide auf AE die Strecke AB = a ab, und ziehe BC ꝛc.

257. Aufgabe. Gegeben: (b + c), e, e′, C.

Digitized by Google

Wird hiervon FK = DJ = BC (als Hypotenuſe des beſtimmten rechtwinkligen Dreiecks DHJ bekannt) abgezogen, ſo findet ſich die Summe der parallelen Seiten des geſuchten Trapezes, nämlich

$$AB + CD = AF - KF = AK,$$ während

bereits $$AB - CD = AH + HJ = AJ$$

gefunden worden. Hieraus ergiebt ſich:

$$2(CD) = AK - AJ = JK,$$

alſo die kleinere Parallele $CD = \frac{1}{2}(JK) = BJ$,

und läßt ſich nun das geſuchte Trapez conſtruiren.

Conſtruction. Man ziehe zu $EF = (a + b + c + d)$ unter dem Abſtande $DH = h$ eine Parallele DL; trage an EF in E einen Winkel $FED = R - \frac{1}{2}D$ an, deſſen Schenkel ED die Parallele DL im Punkte D ſchneidet; errichte auf ED im Halbirungspunkte M ein Loth MA bis zum Schnittpunkte A mit der Parallele EF; verbinde A mit D; fälle aus D ein Loth DH auf EF; trage an DH in D einen $\angle HDJ = R - B$ an, deſſen Schenkel DJ die Parallele EF in J ſchneidet; trage auf EF aus F eine Strecke $FK = DJ$ ab; halbire die Strecke JK in B und ziehe aus B parallel mit JD eine Gerade BC: ſo ſchließen die Linien AB, BC, CD und DA das geſuchte Trapez ein.

Beweis. $\Delta AME \cong AMD$, daher $AE = AD$. Ferner iſt $DJ = CB$ (als Gegenſeiten des Parallelogramms DCBJ), und, weil $FK = DJ$ gemacht worden, auch $FK = BC$, mithin

$$AK = AB + CD,$$

während $$AJ = AB - CD;$$

woraus folgt: $AK - AJ = 2(CD) = JK$.

Es iſt alſo per constr. $BJ = \frac{1}{2}(JK)$; folglich $BJ = CD$.

Hierzu findet ſich: $AB = AJ + JB = (AK - JK) + \frac{1}{2}(JK)$

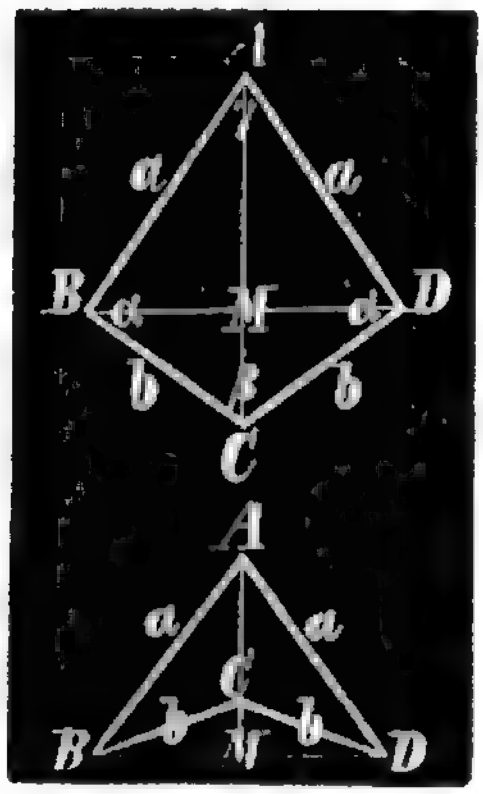
$$= AK - \frac{1}{2}(JK) = AK - BK = AB.$$

Es iſt alſo $AB + BC + CD + AD = AB + KF + BK + AE$, d. i. der Umfang des Trapezes $ABCD = EA + AB + BK + KF = EF$.

In dem gleichſchenkligen Dreieck ADE iſt Baſiswinkel $AED = R - \frac{1}{2}D$ per constr., daher der Außenwinkel an der Spitze des Dreiecks, nämlich $\angle DAB = 2(R - \frac{1}{2}D) = 2R - D$, alſo $\angle ADC = D$, als Supplementwinkel zu $\angle DAB$. — Ferner iſt in dem rechtwinkligen Dreieck DHJ der Winkel $HDJ = R -$

Digitized by Google

Figure 1.1 Sample figure caption.



e′ iſt die Diagonale BD, welche die Scheitel der gleichen Winkel verbindet.

α iſt der ungleichſchenklige Winkel ABC = ADC.

β iſt der gleichſchenklige Winkel BCD.

γ iſt der gleichſchenklige Winkel BAD.

δ iſt der Winkel ABD = ∠ ADB, den die Diagonale BD = e′ mit der größeren Seite AB = AD = a bildet.

262. Aufgabe. Gegeben: a, b, α.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = α ein Δ ABC, wodurch ſich die Diagonale AC = e ergiebt; fälle aus B ein Loth BE auf die AC = e, reſp. auf die Verlängerung derſelben; verlängere BE über E und mache ED = EB; verbinde ſodann D mit A und C: ſo iſt ABCD das geſuchte Deltoid.

263. Aufgabe. Gegeben: a, b, β.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = b, als Schenkel, und ∠ BCD = β, als Winkel an der Spitze, ein gleichſchenkliges Dreieck CBD, wodurch ſich die Diagonale BD = e′ ergiebt; und conſtruire aus BD = e′, als Baſis, und AB = a, als Schenkel, ein zweites gleichſchenkliges Dreieck ABD: ſo iſt ABCD das geſuchte Deltoid.

264. Aufgabe. Gegeben: a, b, δ.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, als Schenkel, und ∠ ABD = δ, als Baſiswinkel, ein gleichſchenkliges Dreieck ABD, und aus der gefundenen BD, als Baſis, und BC = b, als Schenkel, ein zweites gleichſchenkliges Δ CBD ꝛc.

265. Aufgabe. Gegeben: a, b, e.

Conſtruction. Δ ABC aus AB = a, BC = b und AC = e. Alsdann wie in Aufgabe **262**.

266. Aufgabe. Gegeben: a, b, e′.

Conſtruction. Gleichſchenkliges Δ ABD aus BD = e′, als Baſis, und AB = a, als Schenkel, ſo wie gleichſchenkliges Dreieck CBD aus BD = e′, als Baſis, und BC = b, als Schenkel.

267. Aufgabe. Gegeben: a, e, e′.

Digitized by Google

Construction. Rechtwinkliges Δ ABE aus AB = a, als Hypotenuse, und BE = ½ e', als Kathete. Alsdann verlängere man BE über E, wie auch AE über E; mache BD = e' und AC = e; und verbinde C mit B und D, wie auch D mit A.

Oder: man construire aus BD = e', als Basis, und AB = a, als Schenkel, ein gleichschenkliges Δ ABD; verbinde den Halbirungspunkt E der BD mit A; verlängere AE über E, bis AC = e wird; und verbinde C mit B und D.

268. Aufgabe. Gegeben: a, β, γ.

Construction. Gleichschenkliges Δ ABD aus AB = a, als Schenkel, und ∠ BAD = γ, als Winkel an der Spitze, wodurch sich die Diagonale BD = e' findet. Alsdann gleichschenkliges Δ CBD aus BD = e', als Basis, und ∠ BCD = β, als Winkel an der Spitze.

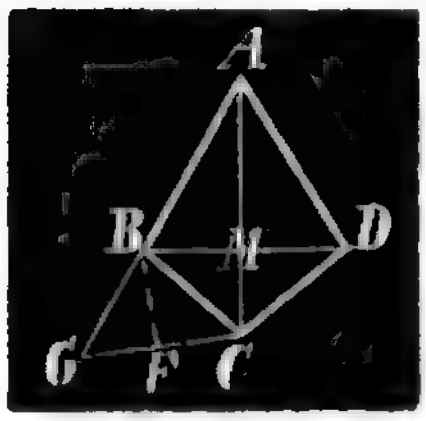
269. Aufgabe. Gegeben: e, β, γ.

Construction. Δ ABC aus AC = e und den beiden anliegenden Winkeln BAC = ½ γ und BCD = ½ β; desgleichen Δ ADC aus AC = e und den beiden anliegenden Winkeln DAC = ½ γ und DCA = ½ β.

270. Aufgabe. Gegeben: b, β, δ.

Construction. Gleichschenkliges Δ CBD aus BC = b, als Schenkel, und ∠ BCD = β, als Winkel an der Spitze; alsdann gleichschenkliges Δ ABD aus BD, als Basis, und ∠ ABD = δ, als Basiswinkel.

271. Aufgabe. Gegeben: (a + b), e, α.



Construction. Man construire aus AG = (a + b), AC = e und dem der AC = e gegenüberliegenden Winkel AGC = ½ α ein Δ AGC; errichte auf CG im Halbirungspunkte F ein Loth FB bis zum Schnittpunkte B mit der AG; verbinde B mit C; fälle aus B ein Loth BM auf AC; verlängere BM über M um sich selbst, wodurch Punkt D gefunden wird; und verbinde D mit A und C.

272. Aufgabe. Gegeben: (a + b), e', δ.

Construction I. Gleichschenkliges Dreieck AEF aus AE = (a + b), als Schenkel, und ∠ AEF = ∠ ABD = δ, als

Digitized by Google

275. Aufgabe. Gegeben: $(a + b)$, α, β. (Figur der 271. Aufgabe.)

Construction. Δ AGC aus $AG = (a + b)$ und den beiden anliegenden Winkeln $AGC = \frac{1}{2}\alpha$ und $GAC = 2R - (\alpha + \frac{\beta}{2})$. Man errichte auf CG im Halbirungspunkte F ein Loth FB bis zum Schnittpunkte B mit der Seite AG; ziehe BC; fälle aus B ein Loth BM auf AC; verlängere BM über M; mache die Verlängerung $MD = BM$; und verbinde D mit A und C.

276. Aufgabe. Gegeben: $(a - b)$, α, γ. (Figur der 273. Aufgabe.)

Construction. Δ AEC aus $AE = (a - b)$ und den beiden anliegenden Winkeln $AEC = R + \frac{\alpha}{2}$ und $EAC = \frac{\gamma}{2}$. Man errichte auf EC im Halbirungspunkte F ein Loth FB bis zum Schnittpunkte B mit der Verlängerung von AE; verbinde B mit C ꝛc.

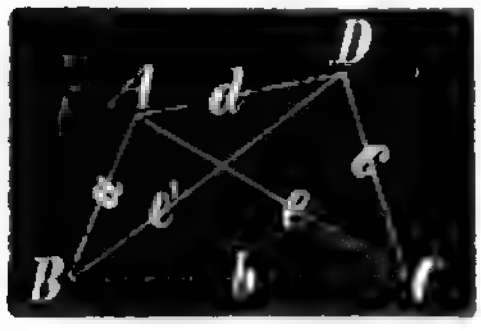
277. Aufgabe. Gegeben: $(a + b)$, $(a - b)$, e.

Construction. Es findet sich die größere Seite $AB = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)$, die kleinere Seite $BC = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)$. Man construire Δ ABC aus den drei Seiten AB, BC und $AC = e$ ꝛc.

278. Aufgabe. Gegeben: a, $(e + e')$, $(e - e')$.

Construction. Gleichschenkliges Dreieck ABD aus $BD = \frac{1}{2}(e + e') - \frac{1}{2}(e - e')$, als Basis, und $AB = a$, als Schenkel. Man verlängere die Höhe AM dieses Dreiecks über M bis C, so daß $AC = \frac{1}{2}(e + e') + \frac{1}{2}(e - e')$ wird; und verbinde C mit B und D.

b. Die Vierecke.



Bezeichnung:

a ist die Seite AB. c ist die Seite CD.
b „ „ „ BC. d „ „ „ AD.
e ist die Diagonale AC.
e' „ „ „ BD.
h'. ist die Höhe aus B auf AC.
h''. „ „ „ „ D „ AC.
A, B, C, D sind die Winkel des Vierecks an den gleichnamigen Eckpunkten.

Digitized by Google

α iſt der Winkel ABD, gebildet von der Seite AB und der Diagonale BD.

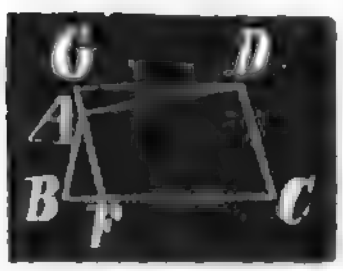
β iſt der Winkel BAC, gebildet von der Seite AB und der Diagonale AC.

γ iſt der Winkel BDC, gebildet von der Seite CD und der Diagonale BD.

279. Aufgabe. Gegeben: a, b, A, B, C.

Conſtruction. Δ ABC aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = B. Man ergänze $\angle$ BAC zum $\angle$ BAD = A, wie auch $\angle$ BCA zum $\angle$ BCD = C und verlängere die Schenkel AD und CD bis zum Schnittpunkte D: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

280. Aufgabe. Gegeben: a, c, A, B, C.



Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, dem anliegenden Winkel ABF = A und dem gegenüberliegenden $\angle$ AFB = $\angle$ DCB = C ein Δ ABF; trage an AB im Punkte A einen Winkel BAD = A an; verlängere FA über A; und mache FG = CD = c; verlängere BF über F; ziehe aus G parallel BF eine Gerade GD bis zum Schnittpunkte D mit dem Schenkel AD; ziehe ſodann DC $\parallel$ GF bis zum Schnittpunkte C mit der verlängerten BF: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

281. Aufgabe. Gegeben: a, b, d, A, B. (Figur der vorigen Seite.)

Conſtruction. Δ ABD aus AB = a, AD = d und Winkel BAD = A. Hierauf trage man an AB = a im Endpunkte B einen Winkel ABC = B an, und conſtruire aus BC = b, der gefundenen Diagonale BD = d' und $\angle$ CBD ein Δ BCD: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

282. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, A, B.

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = B ein Δ ABC; trage an AB = a im Endpunkte A einen Winkel BAD = A an, und ſchneide den Schenkel AD desſelben aus dem Punkte C mit CD = c in dem Punkte D.

283. Aufgabe. Gegeben: b, c, d, A, B.

Digitized by Google

ein Loth BM bis zum Schnittpunkte M. Dann erſcheint BD als Sehne und BE als Tangente eines Kreiſes, der ſich mit dem Radius MB um den Mittelpunkt M ſchlagen läßt. In dieſem Kreiſe iſt der von der Sehne BD und der Tangente BE gebildete Winkel DBE gleich dem Peripheriewinkel BAD im entgegengeſetzten Abſchnitte. Hiermit iſt, da der eine Schenkel AB des Peripheriewinkels = a gemacht werden ſoll, die Conſtruction des Vierecks ABCD gefunden.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = b, CD = c und dem eingeſchloſſenen Winkel BCD ein Δ BCD; trage an BD im Endpunkte B der Spitze C zugewendet einen Winkel DBE = A an; errichte im Scheitel B auf BE ein Loth BM und auf BD im Halbirungspunkte F ein Loth FM; verlängere beide Lothe bis zum Schnittpunkte M; ſchlage um M mit MB, als Radius, einen Kreis; trage AB = a als Sehne aus dem Punkte B in denſelben ein; und verbinde A mit D: ſo iſt ∠ BAD = ∠ DBE = A, und demgemäß ABCD das geſuchte Viereck.

285. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, d, A. (Figur der 121. Seite.)

Conſtruction. Δ ABD aus AB = a, AD = d und dem eingeſchloſſenen Winkel BAD = A. Hiermit iſt BD gefunden. Alsdann Δ CBD aus BD, BC = b und CD = c.

286. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, d, e'. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Δ ABD aus AB = a, AD = d und BD = e', ferner Δ CBD aus BD = e', BC = b und CD = c.

287. Aufgabe. Gegeben: a, b, d, e', B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und BD = e' ein Δ ABD; trage an AB = a im Punkte B einen Winkel ABC = B an; mache den Schenkel BC = c; und verbinde C mit D.

288. Aufgabe. Gegeben: a, c, d, e', B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und BD = e' ein Δ ABD: trage an AB = a im Punkte B einen Winkel ABC = B an, und ſchneide aus D mit DC = c den Schenkel BC des genannten Winkels im Punkte C.

289. Aufgabe. Gegeben: a, d, e, e', B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und BD = e' ein Δ ABD; trage im Punkte B an AB = a einen

Digitized by Google

Winkel ABC = B an; ſchneide aus A mit AC = e den Schenkel BC in C; und verbinde C mit D.

290. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, e', A. (Figur der 284. Aufgabe.

Conſtruction. Man conſtruire aus BC = b, CD = c und BD = e' ein △ CBD, und verfahre ſodann wie in Aufg. 284.

291. Aufgabe. Gegeben: a, b, e', A, B. (Figur der 121. Seite.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BD = e' und dem der Seite BD = e' gegenüberliegenden Winkel BAD = A ein △ ABD; trage im Punkte B an AB = a einen ∠ ABC = B an; mache den Schenkel BC = b; und verbinde C mit D.

292. Aufgabe. Gegeben: a, c, e', A, B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BD = e' und dem der Seite BD = e' gegenüberliegenden Winkel BAD = A ein △ ABD; trage im Punkte B an AB = a einen Winkel ABC = B an, und ſchneide den Schenkel BC desſelben aus D mit DC = c in dem Punkte C.

293. Aufgabe. Gegeben: a, b, e, e', A. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und AC = e ein △ ABC; trage im Punkte A an AB = a einen Winkel BAD = A an; ſchneide aus B mit BD = e' den Schenkel AD desſelben in D, und verbinde C mit D.

294. Aufgabe. Gegeben: a, e, e', A, B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BD = e' und dem der Seite BD = e' gegenüberliegenden Winkel BAD = A ein △ ABD; trage im Punkte A an AB = a einen Winkel ABC = B an; ſchneide den Schenkel BC aus A mit AC = e im Punkte C; und verbinde C mit D.

295. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, A, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln BAD = A und ABD = α ein Dreieck ABD, wodurch ſich BD = e' ergiebt; alsdann aus BD = e', BC = b und CD = c ein △ BCD.

296. Aufgabe. Gegeben: a, b, A, B, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln BAD = A und ABD = α ein Dreieck

Digitized by Google

ABD; trage im Punkte B an AB einen Winkel ABC = B an; mache den Schenkel BC = b; und verbinde C mit D.

297. Aufgabe. Gegeben: a, c, A, B, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln BAD = A und ABD = α ein Dreieck ABD; trage im Punkte B an AB einen Winkel ABC = B an; und ſchneide aus D mit DC = c den Schenkel BC in C.

298. Aufgabe. Gegeben: a, b, c, A, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Δ ABD aus AB = a und den beiden anliegenden Winkeln BAD = A und ABD = α; ſodann Δ CBD aus BD (Seite des Δ ABD), BC = b und CD = c.

299. Aufgabe. Gegeben: a, e, A, B, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AC = e und dem der Seite AC gegenüberliegenden Winkel ABC = B ein Δ ABC; trage an AB = a in A einen Winkel BAD = A und in B einen Winkel ABD = α an, deren Schenkel AD und BD ſich im Punkte D ſchneiden; und verbinde D mit C.

300. Aufgabe. Gegeben: a, b, d, e, e'. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Δ ABC aus a, b, e; ſodann Δ ABD aus a, d, e' (beide Dreiecke über AB = a). Man ziehe zuletzt CD.

301. Aufgabe. Gegeben: a, b, d, e, A. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und dem eingeſchloſſenen Winkel BAD = A ein Δ ABD, über AB = a mit BC = b und AC = e ein Δ ABC; und verbinde C mit D.

302. Aufgabe. Gegeben: a, d, e, A, B. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AD = d und dem eingeſchloſſenen Winkel BAD = A ein Δ ABD; trage an AB im Punkte B einen Winkel ABC = B an; ſchneide aus A mit AC = e den Schenkel BC im Punkte C; und verbinde C mit D.

303. Aufgabe. Gegeben: a, c, e, α, β. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AC = e und dem eingeſchloſſenen Winkel BAC = β ein Δ ABC; trage an AB in B einen Winkel ABD = α an; ſchneide den Schenkel BD aus C mit CD = c im Punkte D; und verbinde D mit A.

304. Aufgabe. Gegeben: a, e, e', α, β. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, AC = e

Digitized by Google

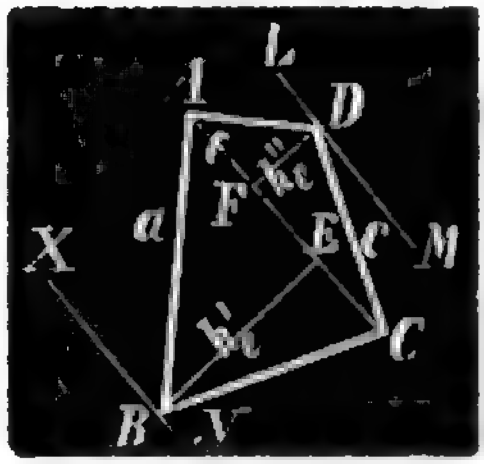
317. Aufgabe. Gegeben: $(a+b)$, c, B, e, e'.

Conſtruction. (Fig. der 313. Aufgabe.) Man conſtruire aus $AE=(a+b)$, $AD=d$ und dem der Seite AD gegenüberliegenden Winkel $AED=\frac{1}{2}B$ ein ΔADE; ſchneide aus D mit $BD=e'$ die AE im Punkte B; conſtruire über $AD=d$, als Baſis, mit $DC=c$ und $AC=e$, als Seiten, ein ΔCAD; und verbinde C mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

318. Aufgabe. Gegeben: $(a+b)$, A, B, C, $\angle(bc)$ oder $\angle ACB=\delta$.

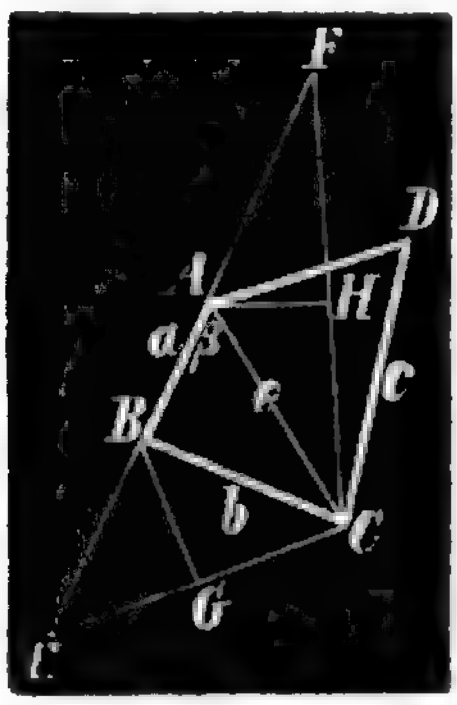
Conſtruction. (Figur der 313. Aufgabe.) ΔACE aus $AE=(a+b)$ und den beiden anliegenden Winkeln $AEC=\frac{1}{2}B$ und $CAE=2R-(B+\delta)$. Hierauf trage man im Punkte A an AE einen $\angle DAE=A$, und im Punkte C an AC einen $\angle ACD=C-\delta$ an; verlängere die Schenkel AD und CD bis zum Schnittpunkte D; errichte auf CE im Halbirungspunkte F ein Loth FB bis zum Schnittpunkte B mit der AE, und verbinde B mit C: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

319. Aufgabe. Gegeben: a, c, e, h'_c, h''_c.



Conſtruction. Man conſtruire aus $AB=a$, als Hypotenuſe, und $BE=h'_c$, als Kathete, ein rechtwinkl. ΔABE; verlängere AE bis C, ſo daß $AC=e$ wird; ziehe unter dem Abſtande $DF=h''_c$ zu $AC=e$ eine Parallele LM, ſchneide letztere aus C mit $CD=c$ in D; und verbinde D mit A und C, wie auch C mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

320. Aufgabe. Gegeben: $(a+b+e)$, c, A, B, β.



Conſtruction. Man conſtruire aus $EF=(a+b+e)$ und den beiden anliegenden Winkeln $FEC=\frac{1}{2}B$ und $EFC=\frac{1}{2}\beta$ ein Dreieck EFC; halbire CE in G, CF in H; errichte in den Halbirungspunkten G und H die Lothe GB und HA, welche die EF in B und A ſchneiden; verbinde A und B mit C, trage an EA im Punkte A einen Winkel $EAD=A$ an;

Digitized by Google

Contributors

Ahmed Abdelkader is a Ph.D. candidate in computer science at the University of Maryland, College Park. His research interests include computer vision, machine learning, and computational photography. He received his B.Sc. and M.Sc. degrees in computer science from Cairo University, Egypt, in 2006 and 2009, respectively.

Sameer Agarwal is a software engineer at Google Inc. His research interests include computer vision and large scale optimization. He received his Ph.D. in computer science from the University of California, San Diego in 2009.

Pablo Fernández Alcantarilla is a Ph.D. candidate in computer vision at the University of Alcalá, Spain. His research interests include computer vision, machine learning, and robotics. He received his M.Sc. degree in telecommunications engineering from the University of Alcalá in 2008.

Jean-Yves Bouguet is a computer vision scientist at Google Inc. His research interests include camera calibration, 3D reconstruction, and visual tracking. He received his Ph.D. in electrical engineering from the California Institute of Technology in 1999.

Gary Bradski is a consulting professor at Stanford University and a computer vision scientist at Google Inc. His research interests include machine learning, computer vision, and robotics. He received his Ph.D. in electrical engineering from the University of California, San Diego in 1992.

Adrian Kaehler is a computer vision scientist at Google Inc. His research interests include computer vision, machine learning, and robotics. He received his B.Sc. degree in physics from Reed College in 1990.

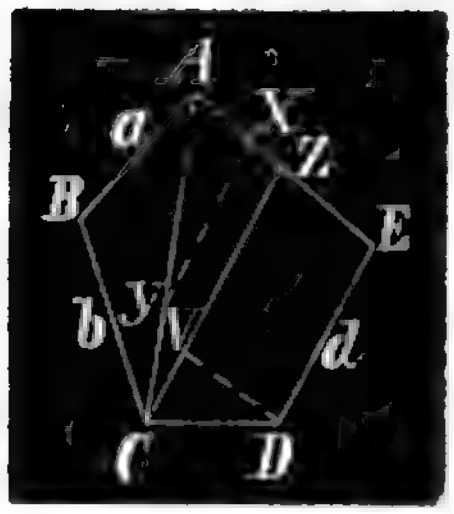
Vincent Lepetit is a Professor at the Computer Vision Laboratory, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Switzerland. His research interests include computer vision, machine learning, and augmented reality. He received his Ph.D. in computer vision from the University of Nancy, France in 2001.

Manolis Lourakis is a researcher at the Institute of Computer Science, Foundation for Research and Technology - Hellas (FORTH), Greece. His research interests include computer vision, numerical optimization, and robotics. He received his Ph.D. in computer science from the University of Crete in 2000.

Ethan Rublee is a computer vision scientist at Willow Garage Inc. His research interests include computer vision, machine learning, and robotics. He received his Ph.D. in computer science from the University of California, Santa Cruz in 2009.

Edgar Simo-Serra is a Ph.D. candidate in computer science at the Waseda University, Japan. His research interests include computer vision, machine learning, and computer graphics. He received his B.Sc. and M.Sc. degrees in computer science from the Waseda University, Japan in 2008 and 2010, respectively.

Eric Tola is a Ph.D. candidate at the Computer Vision Laboratory, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Switzerland. His research interests include computer vision, machine learning, and augmented reality. He received his M.Sc. degree in computer science from the École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Switzerland in 2005.



Construction. Man construire aus a, b und dem eingeschlossenen Winkel B ein Δ ABC; trage an AB = a im Punkte A einen Winkel BAE = A und an BC = b im Punkte C einen Winkel BCD = 6 R — (A + B + D + E), so wie an den Schenkel AE in einem beliebigen Punkte X einen Winkel AXY = E an; ziehe aus C parallel zu YX eine Gerade CZ bis zu dem Schnittpunkte Z mit dem Schenkel AE; trage aus Z auf CZ eine Strecke ZV = d ab; ziehe aus V parallel zu dem Schenkel AE eine Gerade VD bis zu dem Schnittpunkte D mit dem Schenkel CD, wie auch aus D parallel zu CZ eine Gerade DE bis zu dem Schnittpunkte E mit dem Schenkel AE: so ist ABCDE das gesuchte Fünfeck.

II. Zwei Winkel und eine Seite sind nicht gegeben.

Dritter Fall.

Die beiden fehlenden Winkel liegen an der fehlenden Seite.

323. Aufgabe. Ein Fünfeck aus a, b, c, e, A, B, C zu construiren.

Construction. (Fig. der 321. Aufgabe.) Man construire aus a, b und dem eingeschlossenen Winkel B ein Δ ABC; trage an AB = a im Punkte A einen Winkel BAE = A, an BC = b im Punkte C einen Winkel BCD = C an; und mache den Schenkel AE = e, den Schenkel CD = c; und ziehe zuletzt DE: so ist ABCDE das gesuchte Fünfeck.

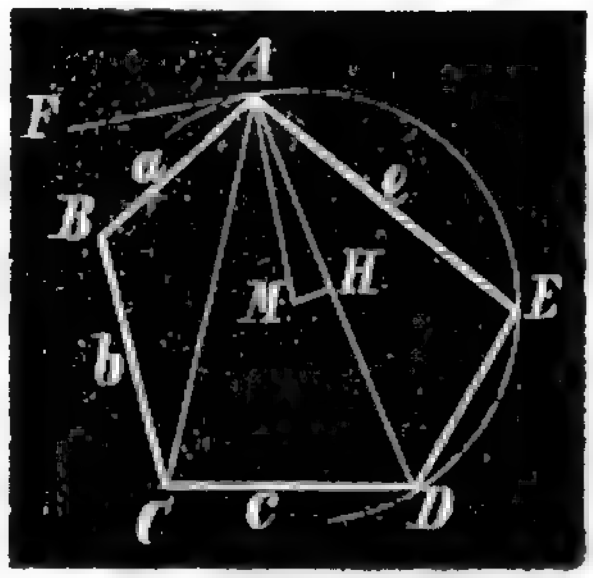
Vierter Fall.

Die zusammenstoßenden Schenkel der nicht gegebenen Winkel bilden einen bekannten Winkel, der an der fehlenden Seite liegt.

324. Aufgabe. Ein Fünfeck aus a, b, c, e, B, C, E zu construiren.

Construction. Man construire aus a, b, ∠(ab) = B ein Δ ABC; trage an BC = b in dem Punkte C einen Winkel BCD = C; mache den Schenkel CD = c, und ziehe DA; trage an AD in dem Punkte A einen Winkel DAF = E; errichte auf AF in A ein Loth AM, und auf AD in dem Hal-

Digitized by Google

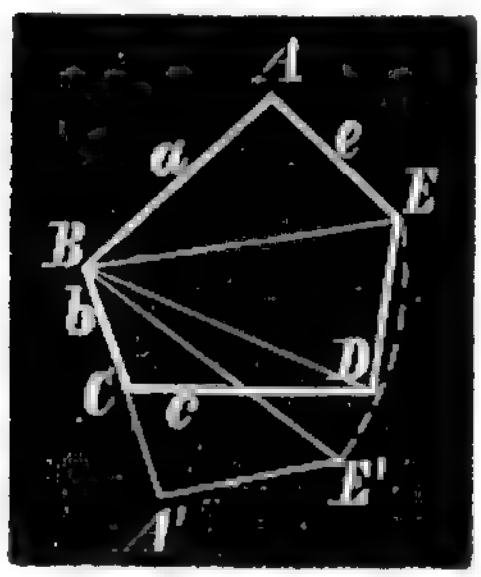


birungspunkte H ein Loth HM bis zum Schnittpunkte M; ſchlage aus M mit MA, als Radius, über AD, als Sehne, einen Kreisbogen AED; trage in dieſen Kreisbogen aus dem Punkte A eine Sehne AE = e ein; und verbinde E mit D: ſo iſt ABCDE das geſuchte Fünfeck.

Fünfter Fall.

Die fehlenden drei Stücke liegen auf beliebige andere Weiſe zu einander.

325. Aufgabe. Ein Fünfeck aus a, b, c, e, A, C, D zu conſtruiren.



Conſtruction. Man conſtruire aus b, c, ∠(bc) = C ein Δ BCD; trage auf der Richtung BC eine Strecke BA' = a ab; trage an BA' in A' einen ∠ BA'E' = A an; mache den Schenkel A'E' = e; verbinde E' mit B; trage an CD = c in dem Punkte D einen Winkel CDE = D an; ſchneide den Schenkel DE aus B mit BE = BE'; ziehe BE und mache BE zur Grundlinie eines Dreiecks ABE, deſſen Seiten AB = a und AE = e ſind: ſo iſt ABCDE das geſuchte Fünfeck.

III. Drei Winkel ſind nicht gegeben.

Sechster Fall.

Die fehlenden Winkel folgen auf einander.

326. Aufgabe. Ein Fünfeck aus a, b, c, d, e, A, B zu conſtruiren.

Conſtruction. (Figur der **321.** Aufg.) Man conſtruire aus a, b, ∠(ab) = B ein Δ ABC; trage an AB = a in dem Punkte A einen Winkel BAE = A an; mache den Schenkel AE = e; ſchlage aus E mit ED = d und aus C mit CD = c Kreisbogen, die ſich in D ſchneiden; und verbinde D mit C und E: ſo iſt ABCDE das geſuchte Fünfeck.

Digitized by Google

Siebenter Fall.

Die fehlenden Winkel folgen nicht auf einander.

327. Aufgabe. Ein Fünfeck aus a, b, c, d, e, A, C zu construiren.

Construction. (Figur der 325. Aufg.) Man construire (wie in Aufgabe 326) die beiden Dreiecke BCD und BA'E'; schlage aus B mit BE' einen Kreisbogen EE'; schneide letzteren aus D mit DE = d in dem Punkte E; verbinde E mit B und D; und construire über BE = BE', als Grundlinie, ein Dreieck ABC, dessen Seiten AB = a und AE = e sind: so ist ABCDE das gesuchte Fünfeck.

Anmerkung. Werden außer den Seiten und Winkeln des Polygons, auch die Diagonalen und die von den Diagonalen an den Endpunkten der Seiten gebildeten Winkel zur Bestimmung der zu construirenden Figur verwendet, so ergiebt sich zu den vorstehenden sieben Fällen noch eine ganze Reihe von Aufgaben, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Abschnitt II.

Kreise, nebst den in und um den Kreis beschriebenen Figuren.

Bezeichnung.

K, K', K'' sind Kreise von gegebener Lage und Größe.
M, M', M'' sind die Mittelpunkte derselben.
r, r', r'' sind die zugehörigen Radien.
ϱ, ϱ', ϱ'' sind Radien gesuchter Kreise.
s, s', s'' sind Sehnen von gegebener Länge.

In Kreisaufgaben bezeichnet:

⊙ einen zu construirenden Kreis,
P einen Punkt, durch den die Peripherie gehen soll,
L eine Linie, die von der Peripherie berührt werden soll,
K einen Kreis, der von dem zu construirenden Kreise berührt werden soll,

Digitized by Google

P_b, daß die Tangente von P an den geſuchten Kreis = b ſein ſoll,

L_s, K_s, daß der geſuchte Kreis von L oder K die Sehne s abſchneiden ſoll.

9. Geometriſche Örter.

328. Aufgabe. Gegeben: P, r.

Conſtruction. Man conſtruire um den Punkt P, als Centrum, mit dem Radius r einen Kreis, ſo iſt letzterer der geometriſche Ort für das Centrum des geſuchten Kreiſes, d. h. der geſuchte Mittelpunkt, um den mit dem Radius r ein durch den Punkt P gehender Kreis geſchlagen werden ſoll, iſt irgend ein Punkt der zuerſt conſtruirten Kreislinie.

329. Aufgabe. Gegeben: P, P′.

Auflöſung. Man verbinde P mit P′ durch eine gerade Linie PP′, und errichte auf derſelben in dem Halbirungspunkte H ein Perpendikel HX, ſo iſt letzteres der geometriſche Ort der Mittelpunkte aller Kreiſe, welche eine gemeinſchaftliche Sehne PP′ haben. (Das Perpendikel HX kann übrigens auf beiden Seiten der Verbindungslinie PP′ errichtet werden.)

330. Aufgabe. Gegeben: L und P auf L.

Auflöſung. Man errichte auf L in P ein Loth PX, ſo iſt letzteres der geometriſche Ort der Mittelpunkte aller Kreiſe, welche von der Linie L in dem Punkte P berührt werden. (Man kann auf beiden Seiten der Linie L in dem Punkte P ein Loth PX errichten.)

331. Aufgabe. Gegeben: L, r.

Auflöſung. Der geometriſche Ort des geſuchten Centrums iſt eine Parallele zu L unter einem ſenkrechten Abſtande = r. Auf jeder der beiden Seiten der Linie L kann die erwähnte Parallele conſtruirt werden.

332. Aufgabe. Gegeben: L und L′ convergent.

Auflöſung. Das geſuchte Centrum liegt auf der Halbirungslinie des von den Linien L und L′ gebildeten Winkels.

333. Aufgabe. Gegeben: L ∥ L′.

Auflöſung. Das geſuchte Centrum liegt auf der in der mittleren Entfernung zwiſchen L und L′ gezogenen Parallele.

Figure 1.1 Sample Output

Figure 1.1 shows the output of the program. The program displays a window containing a single line of text. The text is the traditional first program for learning a new language, "Hello, World!". The exact details of how you run this program depend on your development environment. Chapter 2 discusses this in more detail.

Now let's look at the program line by line. The first line

```
#include <iostream>
```

tells the compiler to include information about the standard input/output library. The angle brackets around the name `iostream` tell the compiler that `iostream` is a standard header. Typically, this causes the compiler to look for `iostream` in a standard location. The `iostream` header defines several facilities for handling input and output. The program uses one of these facilities, `cout`, to display the message.

The next line

```
int main()
```

begins the definition of a function named `main`. Functions are the building blocks of C++ programs. Every program must have a function named `main`. Normally, you can't choose arbitrary names for functions because most names are reserved for use by the compiler or other software. However, `main` is special. The operating system calls `main` when it runs the program. Usually, `main` is responsible for making sure that everything else the program needs gets done.

The empty parentheses following `main` indicate that `main` doesn't require any information to do its job. Chapter 7 discusses functions in more detail.

The next line

```
{
```

begins the function body. The matching brace

```
}
```

ends the function body. Everything between the braces is part of the function.

The line

```
    cout << "Hello, World!" << endl;
```

uses `cout` to display the message. The `cout` facility is defined in the `std` namespace. Namespaces help organize large programs. Chapter 3 discusses namespaces in more detail. The `::` symbol, pronounced "scope resolution," indicates that `cout` is defined in the `std` namespace. The `<<` symbol indicates that the text following it should be sent to `cout`. The `endl` facility, also defined in the `std` namespace, causes a line break. Thus, the program displays the message and then moves to the next line.

Finally, the line

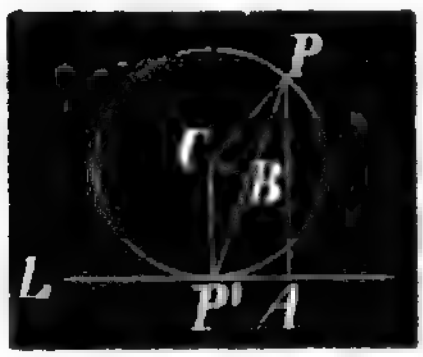
```
    return 0;
```

causes the program to return a value to the operating system. Usually, the operating system ignores this value. However, it can be useful if you want to write a program that runs other programs. Then the other programs can use the return value to determine whether your program succeeded or failed.

Now that you've seen a simple program, let's look at some more interesting ones.

Construction. Man verbinde P′ mit P und P″; errichte in den Halbirungspunkten der Verbindungslinien PP′ und P′P″ Perpendikel; und verbinde den Schnittpunkt C der beiden Perpendikel mit dem Punkte P′ (oder P, auch P″): so ist der Schnittpunkt C das Centrum und die Verbindungslinie CP′ (resp. CP oder CP″) der Radius des durch die Punkte P, P′, P″ gehenden Kreises.

346. Aufgabe. Gegeben: P, L, P′ auf L.



Construction. Man errichte auf L in P′ ein Loth P′C; verbinde P′ mit P durch eine Gerade PP″; errichte auf PP′ im Halbirungspunkte B ein Loth BC bis zum Schnittpunkte C mit dem Lothe P′C; und beschreibe aus C mit dem Radius CP′ = CP einen Kreis: so geht derselbe durch den Punkt P und berührt die Gerade L in dem Punkte P′.

347. Aufgabe. Gegeben: L ∥ L′, P auf L.

Construction. Man errichte auf L in P ein Loth bis an die Parallele L′ und halbire dieses Loth: so ist der Halbirungspunkt das Centrum, der halbe Abstand der Parallelen der Radius des gesuchten Kreises.

348. Aufgabe. Gegeben: die convergenten Linien L und L′, so wie Punkt P auf L.

Construction. (Figur der 341. Aufgabe.) Man halbire den Winkel, den die Linien L und L′ am Schnittpunkte S bilden, durch eine Gerade FG; errichte in P auf L ein Loth PM bis zum Schnittpunkte M mit der Halbirungslinie FG; und beschreibe aus M mit dem Radius MP einen Kreis: so berührt derselbe die Linien L und L′, und zwar die erstere in dem Punkte P.

Ein zweiter Kreis, der ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe entspricht, findet sich, wenn man bei dem angegebenen Verfahren von dem Nebenwinkel PSE des obenerwähnten Winkels ausgeht.

349. Aufgabe. Gegeben: L; L′ ∥ L″.

Construction. Man halbire zwei innere Gegenwinkel, welche von der Geraden L mit den Parallelen L′ und L″ gebildet werden; verlängere die Halbirungslinien AC und BC

Digitized by Google

Figure 1: Schematic of the Ising model on a square lattice. Each site has a spin variable $\sigma_i = \pm 1$ and interacts with its nearest neighbors.

The Hamiltonian of the system is given by

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

where J is the coupling constant and h is the external magnetic field. The first sum runs over all nearest-neighbor pairs $\langle i,j \rangle$.

In two dimensions, the model exhibits a phase transition at a critical temperature T_c given by the Onsager solution:

$$\sinh\left(\frac{2J}{k_B T_c}\right) = 1$$

which yields $T_c = \frac{2J}{k_B \ln(1+\sqrt{2})} \approx 2.269 \, J/k_B$.

Figure 1: Sample Image

Ein Gedicht ist ein Gedicht ist ein Gedicht ist

Figure 1: Sample Image

Figure 2: Sample Image

427. Aufgabe. Viereck aus r, b, d, ∠(de). (Dieſ. Fig.)

Conſtruction. Man lege in den mit dem Radius r conſtruirten Kreis eine Sehne AD = d; trage an dieſelbe in A einen Winkel DAC = ∠(de), und verlängere den Schenkel AC bis zur Peripherie, wodurch eine Diagonale AC = e des Vierecks beſtimmt iſt; trage von C aus eine Sehne CB = b ein; und verbinde B mit A; ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

428. Aufgabe. Viereck aus r, a, c, e. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man trage in den mit dem Radius r conſtruirten Kreis eine Sehne AC = e ein, ſo wie aus den Endpunkten derſelben nach verſchiedenen Seiten die Sehnen AB = a und CD = c; und verbinde C mit B, wie auch D mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

429. Aufgabe. Viereck aus r, a, b, e'. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire mit dem Radius r einen Kreis; trage in denſelben aus einem gemeinſamen Punkte B der Peripherie die drei Sehnen BA = a, BD = e' und BC = b ein; und verbinde D mit A und C: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

430. Aufgabe. Viereck aus r, a, e, e'. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire mit dem Radius r einen Kreis; trage in denſelben eine Sehne AB = a ein; ſchneide die Peripherie aus A mit AC = e, ſo wie aus B mit BD = e'; verbinde die Schnittpunkte C und D, wie auch C mit B, und D mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

431. Aufgabe. Viereck aus r, a, e, α. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man conſtruire in dem mit dem Radius r beſchriebenen Kreiſe zwei auf derſelben Grundlinie ſtehende Sehnendreiecke, nämlich Δ ABD aus AB = a und dem anliegenden Winkel BAD = α, und Δ ABC aus AB = a und AC = e; und verbinde C mit D: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

432. Aufgabe. Viereck aus r, a, b, ε. (Dieſelbe Fig.)

Conſtruction. Man trage in den mit dem Radius r beſchriebenen Kreis eine Sehne AB = a, und von B aus eine Sehne BC = b ein; verbinde A mit C; conſtruire (nach Aufgabe 388) über AB = a einen die Linie AC in O ſchneidenden Kreisbogen, der den Winkel AOB = ε faßt; lege durch B und

Digitized by Google

einen Peripheriewinkel $BZD = \alpha$, wodurch die Diagonale $BD = e'$ beſtimmt iſt; ziehe zu dieſer Diagonale einen parallelen Durchmeſſer $X'Y'$; lege durch denſelben einen zweiten Durchmeſſer XY unter einem Winkel $X'MY = \varepsilon$; ſchneide von dem Mittelpunkte M aus auf XY gleiche Strecken $MA' = MC' = \frac{e}{2}$ ab; errichte in A' und C' Perpendikel bis an die Peripherie, wodurch ſich die Schnittpunkte A und C ergeben; und verbinde jeden dieſer Punkte mit B und D: ſo iſt $ABCD$ das geſuchte Viereck. (Zwei Löſungen.)

437. Aufgabe. Kreisviereck aus b, c, e, α. (Figur der 421. Aufgabe.)

Conſtruction. Man conſtruire aus $BC = b$, $CD = c$ und dem eingeſchloſſenen Winkel $BCD = (2R - \alpha)$ ein Dreieck BCD; lege um letzteres den umbeſchriebenen Kreis; ſchneide aus C die Peripherie desſelben mit $CA = e$ in dem Punkte A; und verbinde A mit B und D: ſo iſt $ABCD$ das geſuchte Sehnenviereck.

438. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, e, e'. (Figur der 421. Aufgabe.)

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = a$, $BC = b$ und $AC = e$ ein ΔABC; beſchreibe um dasſelbe einen Kreis; ſchneide die Peripherie aus B mit $BD = e'$ in dem Punkte D; und verbinde D mit A und C: ſo iſt $ABCD$ das geſuchte Viereck.

439. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, e, α. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. ΔABC aus a, b, e. Man beſchreibe um ΔABC einen Kreis; trage an $AB = a$ in A einen Peripheriewinkel $BAD = \alpha$ an; und verbinde D mit A und C: ſo iſt $ABCD$ das geſuchte Viereck.

440. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, e', α. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus $AB = a$, $BD = e'$ und dem der Seite BD gegenüberliegenden Winkel $BAD = \alpha$ ein ΔBAD; beſchreibe um dasſelbe einen Kreis; trage von B aus eine Sehne $BC = b$ ein; und verbinde C mit B und D: ſo iſt $ABCD$ das geſuchte Viereck.

Digitized by Google

441. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, β, ε. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = β ein Δ ABC; beſchreibe um dasſelbe einen Kreis; conſtruire über AB = a einen die Seite AC in O ſchneidenden Kreisbogen, der den Winkel AOB = ε faßt; lege durch B und O eine Sehne BOD in den erſterwähnten Kreis; und verbinde D mit A und C: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

442. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, c, β, e. (Figur der 421. Aufgabe.)

Conſtruction. Man conſtruire über AC = e einen Kreisbogen ABX'C, der den gegebenen Peripheriewinkel β faßt; ergänze den erwähnten Kreisbogen zu einem Kreiſe; trage in den Bogen von A aus eine Sehne AB = a, und in den Ergänzungsbogen von C aus eine Sehne CD = c ein; verbinde alsdann D mit A, wie auch C mit B: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

443. Aufgabe. Sehnenviereck aus e, α, β, ε. (Figur der 435. Aufgabe.)

Conſtruction. Man conſtruire über AC = e einen Kreisbogen ABX'C, der den gegebenen Peripheriewinkel β faßt; ergänze den Bogen ABX'C zum Kreiſe; ziehe parallel zu AC = e einen Durchmeſſer XY; lege durch letzteren unter einem Winkel X'MY = ε einen zweiten Durchmeſſer X'Y'; trage beliebig einen Peripheriewinkel B"A"D" = α ein, wodurch die Sehne B"D" beſtimmt iſt; ſchneide auf X'Y' aus dem Mittelpunkte M nach beiden Seiten gleiche Stücke MB' = MD' = ½ (B"D") ab; errichte in B' und D' Perpendikel bis an die Peripherie, wodurch ſich die Schnittpunkte B und D ergeben; und verbinde jeden der Punkte B und D mit A und C: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

444. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, c, ∠(ae).

Conſtruction. (Figur der 421. Aufgabe.) Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem der Seite BC gegenüberliegenden Winkel BAC = ∠(ae) ein Δ ABC; lege um dasſelbe den umbeſchriebenen Kreis; trage von C aus eine

Digitized by

Sehne CD = c ein; und verbinde D mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

445. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, e', ∠(ae).

Conſtruction. (Dieſelbe Figur.) Δ ABC aus a, b und ∠(ae), welcher der Seite b gegenüberliegt. Man lege um Δ ABC den umbeſchriebenen Kreis; trage von B aus eine Sehne BD = e' ein; und verbinde D mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

446. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, e, ε. (Figur der 435. Aufgabe.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und AC = e ein Δ ABC; lege um letzteres den umbeſchriebenen Kreis; trage an AC = e in einem beliebigen Punkte P einen Winkel X'PC = ε an; lege von B aus eine zu X'P parallele Sehne BD in den Kreis; und verbinde D mit A: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

447. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, b, ε, ∠(be).

Conſtruction. (Dieſelbe Fig.) Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem der Seite AB gegenüberliegenden Winkel BCA = ∠(be) ein Δ ABC; und verfahre ſodann wie in Aufgabe 446.

448. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, e, e', ∠(eb).

Conſtruction. (Dieſelbe Fig.) Man conſtruire aus AB = a, AC = e und dem der Seite AB gegenüberliegenden Winkel ACB = ∠(eb) ein Δ ABC; lege um letzteres den umbeſchriebenen Kreis; trage von B aus eine Sehne BD = e' ein; und verbinde D mit A und C: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

449. Aufgabe. Sehnenviereck aus a, c, ∠(ae), ∠(ce).

Analyſis. Denkt man ſich den umbeſchriebenen Kreis um das bereits conſtruirte Sehnenviereck ABCD gelegt, und in letzterem beide Diagonalen gezogen, ſo ergiebt ſich: ∠ ABD = ∠ ACD = ∠(ce) als Peripheriewinkel auf demſelben Bogen; und iſt daher Δ ABP durch eine Seite AB = a, und zwei Winkel BAP = ∠(ae) und ∠ ABP = ∠(ce) beſtimmt. Demgemäß findet ſich als zugehöriger Supplementwinkel auch ∠ APB, ſo wie der Scheitelwinkel desſelben, nämlich ∠ CPD, welcher dem Dreieck CDP angehört. Man kennt nun von dieſem Dreieck

Digitized by Google

XMZ = (2 R − β); errichte in X und Z auf den Radien Perpendikel bis zum Schnittpunkt B; verlängere die beiden Tangenten BX und BZ über die Berührungspunkte X und Z, resp. bis A und C, so daß BXA = a und BZC = b wird; lege an K von A und C aus Tangenten bis zum Schnittpunkt D: so ist ABCD das gesuchte Tangentenviereck.

461. Aufgabe. Um K ein Viereck aus a, α, γ zu construiren. (Dieselbe Figur.)

Construction. Man construire in K einen Centriwinkel XMY = (2 R − α); errichte auf den Radien in X und Y Perpendikel bis zum Schnittpunkt A; verlängere AX über X bis B, so daß AB = a wird; lege von B aus eine Tangente an K, von welcher der Kreis in Z berührt wird; verbinde Z mit dem Mittelpunkte M; trage an MZ in M einen Centriwinkel ZMP = (2 R − γ) errichte in P auf MP ein Loth bis zum Schnittpunkt C mit der verlängerten BZ, so wie auf der entgegengesetzten Seite bis zum Schnittpunkt D mit der verlän- AY: so ist ABCD das gesuchte Tangentenviereck.

462. Aufgabe. Um K ein Viereck aus e, α, β zu construiren. (Dieselbe Figur.)

Construction. Man construire in K zwei zusammenstoßende Centriwinkel XMY = (2 R − α) und XMZ = (2 R − β); lege durch X, Y und Z Tangenten an K bis zu den Schnittpunkten A und B, in denen je zwei der Tangenten zusammentreffen; schneide die verlängerte Tangente BZ aus A mit AC = e in dem Punkte C; lege an K von C aus eine Tangente CPD bis zum Schnittpunkt D mit der verlängerten AY: so ist ABCD das gesuchte Tangentenviereck.

463. Aufgabe. Um K ein Viereck aus α, β, γ zu construiren. (Dieselbe Figur.)

Construction. Man construire in K drei anstoßende Centriwinkel XMY = (2 R − α), XMZ = (2 R − β) und ZMP = (2 R − γ); errichte auf den Radien in X, Y, Z und P nach beiden Seiten hin Perpendikel bis zu den Schnittpunkten A, B, C, D: so ist ABCD das gesuchte Tangentenviereck.

464. Aufgabe. Tangentenviereck aus a, b, c, e. (Dieselbe Figur.)

Construction. Man construire aus AB = a, BC = b und

Digitized by Google

AC = e ein Dreieck ABC; ſchlage aus C mit CD = c, und aus A mit AD = (a + c − b) nach einerlei Seite zwei Kreisbogen, die ſich in D kreuzen; und verbinde D mit A und C: ſo iſt ABCD ein Viereck, in welches ſich ein Kreis beſchreiben läßt.

465. Aufgabe. Tangentenviereck aus a, b, c, β. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = β ein Δ ABC; ſchlage aus C mit CD = c, und aus A mit AD = (a + c − b) nach einerlei Seite zwei Kreisbogen, die ſich in D ſchneiden; und verbinde D mit A und C: ſo iſt ABCD ein Viereck, in welches ein Kreis beſchrieben werden kann.

466. Aufgabe. Tangentenviereck aus a, b, c, α. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire einen Winkel BAD = α; mache den Schenkel AB = a und den Schenkel AD = (a + c − b); ſchlage aus B mit BC = b und aus D mit DC = c Kreisbogen, die ſich in C ſchneiden; und verbinde C mit B und D: ſo iſt ABCD das geſuchte Viereck.

467. Aufgabe. Tangentenviereck aus a, b, e, α. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und AC = e ein Dreieck ABC; trage an AB = a in A einen Winkel BAD = α an; beſchreibe einen Kreis, der die drei Linien AB, BC und AD von innen berührt; lege von C aus an dieſem Kreis eine Tangente CD bis zum Schnittpunkt D mit dem Schenkel AD: ſo iſt ABCD das geſuchte Tangentenviereck. (Vergl. Aufgabe 350.)

468. Aufgabe. Tangentenviereck aus a, b, β, γ. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man conſtruire aus AB = a, BC = b und dem eingeſchloſſenen Winkel ABC = β ein Δ ABC; trage an BC = b in C einen Winkel BCD = γ an; conſtruire einen Kreis, der die drei Linien a, b und CD von innen berührt; lege an dieſen Kreis von A aus eine Tangente AD bis zum Schnittpunkt D mit dem Schenkel CD: ſo iſt ABCD das geſuchte Tangentenviereck.

Digitized by Google

Ingredients, 1
Instructions, 1
Introduction, 1
Italian Sausage, 1

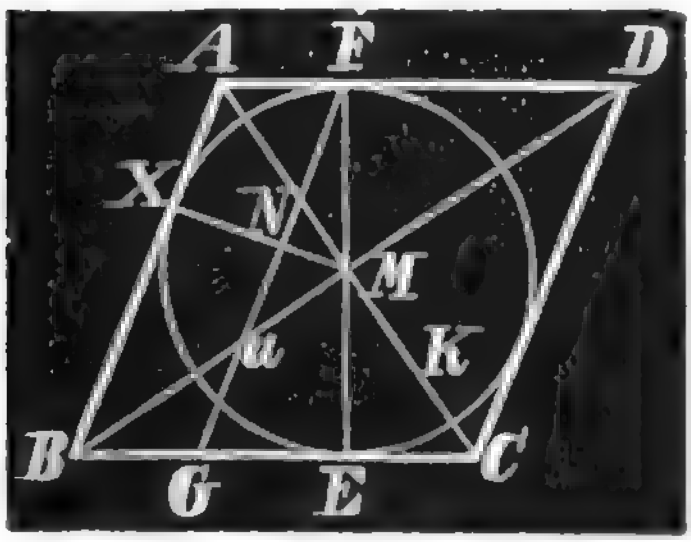
475. Aufgabe. Um K ein gleichſchenkliges Trapez zu conſtruiren, deſſen Schenkel = b gegeben iſt. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man lege durch die Endpunkte E und F des Durchmeſſers EMF zwei Tangenten an K; ſchneide die durch E gehende Tangente aus F mit FG = FH = b in den Punkten G und H; fälle aus M Lothe MI, und MN auf FG und FH; verlängere dieſe Lothe über die Fußpunkte L und N bis zu den Schnittpunkten X und Y mit der Kreislinie K; lege durch X eine Parallele AXD zu GLF, und durch Y eine Parallele BYC zu HNF bis an die durch E und F gehenden Tangenten: ſo iſt ABCD das geſuchte gleichſchenklige Trapez.

476. Aufgabe. Um K ein gleichſchenkliges Trapez zu conſtruiren, von dem der Winkel an der größeren Parallele = α gegeben iſt. (Dieſelbe Figur.)

Conſtruction. Man lege durch die Endpunkte E und F des Durchmeſſers EMF zwei Tangenten an K; trage an den Radius ME in M auf beiden Seiten einen Centriwinkel EMX = EMY = (2 R − α) an; lege durch X und Y Tangenten an den Kreis, von denen die durch E und F gelegten Tangenten in den Punkten A und D, B und C geſchnitten werden: ſo iſt ABCD das geſuchte gleichſchenklige Trapez.

477. Aufgabe. Um K einen Rhombus mit der Seite a zu conſtruiren.



Conſtruction. Man ziehe in K einen Durchmeſſer EF; errichte in E und F Perpendikel auf EF nach beiden Seiten; ſchneide aus F mit FG = a die durch E gehende Tangente in G; fälle aus dem Kreiscentrum M ein Loth MN auf FG; verlängere MN über N bis zum Schnittpunkt X mit der Kreislinie K; lege durch X eine Parallele AB zu FG bis zu den Schnittpunkten A und B mit den durch E und F gehenden Tangenten; verlängere BE über E bis C, und AF über F bis D, ſo daß BC = AD = AB = FG = a wird; und verbinde zuletzt D mit C: ſo iſt ABCD der geſuchte Rhombus.

Digitized by Google

489. Aufgabe. Eine Strecke AC ist gegeben. Ein reguläres Sechseck zu construiren, daß AC die kürzere Diagonale desselben wird. (Dieselbe Figur.)

Construction. Man construire aus AC, als Basis, und dem Basiswinkel $BAC = \frac{R}{3}$ ein gleichschenkliges Dreieck BAC; halbire die Schenkel AB in X, BC in Y; errichte in den Halbirungspunkten X und Y Perpendikel XM und YM bis zum Schnittpunkt M: so ist letzterer der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, so wie $MA = MB = MC = AB$ der zugehörige Radius.

Aus einem Eckpunkte A des regulären Sechsecks lassen sich drei Diagonalen AC, AD, AE ziehen, und zwar ist $AC = AE$ kürzer als AD, welche letztere Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist.

Anmerkung. Der Polygonwinkel $ABC = BAF$ des regulären Sechsecks beträgt $\frac{4}{3}$ R. Durch die Diagonalen aus einem Eckpunkte A entstehen an demselben folgende Winkel: $BAC = FAE = \frac{1}{3}R$ und $CAD = EAD = \frac{1}{3}R$, d. h. die genannten Winkel sind sämmtlich gleich. Hieraus ergeben sich auch diejenigen Winkel, welche von denselben Diagonalen mit den andern Seiten des regulären Sechsecks gebildet werden. Es findet sich nämlich: $\angle BCA = \angle FEA = \frac{1}{3}R$, $\angle ACD = \angle AED = R$ und $\angle ADC = \angle ADE = \frac{2}{3}R$.

Zusatz. In jedem einem Kreise einbeschriebenen Polygon von gerader Seitenzahl ist die Summe des ersten, dritten, fünften ꝛc. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten ꝛc. Winkels. (Zum Beweise ziehe man die Radien nach den Eckpunkten.)

In jedem einem Kreise umbeschriebenen Polygon von gerader Seitenzahl ist die Summe der ersten, dritten, fünften ꝛc. Seite gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten ꝛc. Seite.

490. Aufgabe. Über einer gegebenen Strecke $BC = a$ als Seite ein reguläres Achteck zu construiren.

Construction. Der Polygonwinkel des regulären Achtecks beträgt $1\frac{1}{2}$ R. Winkel von $\frac{1}{2}$ R finden sich im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck. Hieraus ergiebt sich folgendes Ver-

Digitized by Google

werden; und verbinde jeden der Punkte A und C mit B und D: so ist ABCD das gesuchte Quadrat.

Anmerkung. Zwei Seiten des umbeschriebenen, wie auch des einbeschriebenen Quadrats laufen mit zwei Seiten des gegebenen Sechsecks parallel.

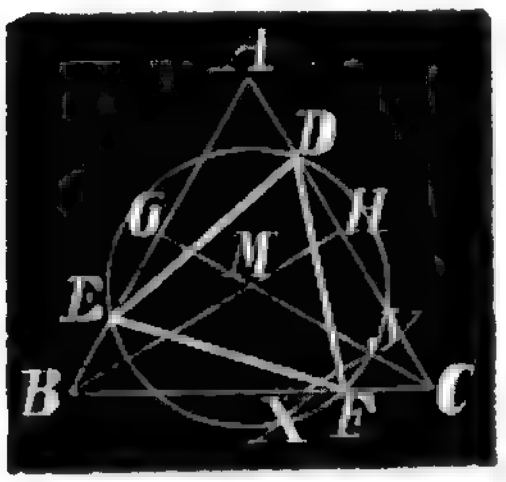
493. Aufgabe. Ein reguläres Polygon zu construiren, das mit einem gegebenen regulären Polygon gleichen Umfang, aber doppelt so viele Seiten hat.

Auflösung. Die Hälfte der Seite des gegebenen n-Ecks ergiebt die Seite des 2n-Ecks von demselben Umfange.

494. Aufgabe. Einen Kreis zu construiren, dem ein Achteck einbeschrieben werden kann, das mit einem gegebenen Quadrat gleichen Umfang hat.

Construction. Das gesuchte Achteck hat die Hälfte der Seite des gegebenen Quadrats zur Seite; und gleicht alsdann die Construction der in Aufgabe 490 angegebenen.

495. Aufgabe. In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges einzubeschreiben, dessen Seite eine gegebene Länge = a hat.



Construction. Man ziehe in dem gegebenen Dreieck aus den Endpunkten einer Seite BC die Höhen BH und CG auf die beiden andern Seiten; trage auf BC von dem Eckpunkte B aus eine Strecke BX = a ab; lege durch X eine Parallele XY zu BH bis an die Höhe CG, wodurch sich auf letzterer ein Punkt Y ergiebt; beschreibe um den Durchschnittspunkt M der Höhen BH und CG mit dem Radius MY einen Kreis, von dem die Seite des gegebenen Dreiecks ABC in sechs Punkten geschnitten werden; und verbinde drei derselben, z. B. D, E und F, die auf den Seiten des gegebenen Dreiecks ABC, von verschiedenen Eckpunkten aus gerechnet, gleiche Strecken (Aufgabe 14) abschneiden, durch gerade Linien: so ist DEF das gesuchte gleichseitige Dreieck. Die Verbindungslinien der andern drei Schnittpunkte schließen ein zweites gleichseitiges Dreieck ein, dessen Seite ebenfalls = a ist.

Digitized by Google

ausgeführt, wo $AB = DE = a$ die Seite des regulären Zehnecks, $DE + DA = AB + AD = r$ den Radius des um dasſelbe beſchriebenen Kreiſes bezeichnet.

516. Aufgabe. Über einer gegebenen feſtliegenden Linie AD, als Seite, ein reguläres Fünfeck zu conſtruiren. (Figur der 512. Aufgabe.)

Analyſis. Es ſei ADXEZ das geſuchte Fünfeck. Man verbinde die Endpunkte der Seite AD mit dem Eckpunkte E, ſo iſt in dem gleichſchenkligen Dreieck EAD, weil der Polygonwinkel $ZEX = \frac{6}{5}R$ durch die Diagonalen EA und ED triſecirt wird, der Winkel an der Spitze, nämlich $\angle AED = \frac{3}{5}R$, mithin Baſiswinkel $EAD = EDA = \frac{4}{5}R$; und läßt ſich daher die Diagonale $ED = EA$ nach Aufgabe 515 finden.

Conſtruction. Man conſtruire aus AD und $\frac{1}{2}AD$, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck, und verlängere die Hypotenuſe desſelben um eine Strecke $= \frac{1}{2}AD$; ſo iſt die Summe dieſer beiden Linien gleich der Diagonale DE des geſuchten Fünfecks. Es kann alſo nun das Dreieck ADE conſtruirt werden, mittelſt deſſen ſich die beiden andern gleichſchenkligen Dreiecke ZAE und XDE leicht ergeben.

517. Aufgabe. Eine Strecke DE iſt gegeben. Ein reguläres Fünfeck ſo zu conſtruiren, daß DE eine Diagonale desſelben wird. (Figur der 512. Aufgabe.)

Conſtruction. Man theile die Strecke DE nach dem goldenen Schnitt; conſtruire aus dem größeren Abſchnitt (BD) derſelben, als Baſis, und der gegebenen Strecke DE, als Schenkel, ein gleichſchenkliges Dreieck EAD; und verfahre ſodann wie beim Schluß der in voriger Aufgabe angedeuteten Conſtruction.

Anmerkung 1. Werden in einem regulären Fünfeck zwei (in P) ſich ſchneidende Diagonalen DE und AX gezogen, ſo iſt der größere Abſchnitt ($EP = AP$) auf jeder gleich der Seite AD des Fünfecks, und jede der beiden Diagonalen DE und AX wird ſtetig getheilt. Man hat alſo:

$$DE : EP = EP : PD$$
$$\text{und } AX : AP = AP : PX.$$

Anmerkung 2. Verlängert man zwei Seiten EZ und DA eines regulären Fünfecks bis zum Schnittpunkt Y mit einander, ſo iſt jede der Verlängerungen ($ZY = AY$) gleich der Diago-

Digitized by Google

ſchlage aus P mit $PC = AE = ED$, und aus M mit $MC = ME = MA - EA$ auf einerlei Seite zwei Kreisbogen, die ſich in C ſchneiden; lege durch C und M einen Durchmeſſer XCMF, und durch X und P eine Sehne XPY in den gegebenen Kreis: ſo iſt $XP : PY = m : n$.

Beweis mittels eines Hülfskreiſes, der mit dem Radius $CP = CX = EA = ED$ um den Mittelpunkt C conſtruirt wird.

522. Aufgabe. Zwei Linien x und y zu conſtruiren, wenn ihre Summe $= s$, ihr Verhältniß $= m : n$ gegeben iſt.

Conſtruction. Man theile die Strecke s in $(m + n)$ gleiche Theile, und faſſe deren m zuſammen; ſo ergiebt ſich die Linie x. Die andere der geſuchten Linien iſt $y = \left(\frac{n}{m+n}\right) s$. Hiernach kommt es darauf an, eine gegebene Strecke s nach einem gegebenen Verhältniß $m : n$ zu theilen. (Aufgabe 507.)

523. Aufgabe. Zwei Linien x und y zu conſtruiren, deren Differenz d und deren Verhältniß $m : n$ gegeben iſt.

Conſtruction. Man zerlege die Strecke d in $(m - n)$ gleiche Theile, und faſſe deren m für die größere Linie x, n hingegen für die kleinere Linie y zuſammen.

524. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien a, b zwei andere x, y zu conſtruiren, deren Verhältniß $= m : n$ gegeben iſt, ſo daß $a : x = y : b$ iſt.

Conſtruction. Die Linie x ergiebt ſich, wenn man zu den Strecken n, a, b die vierte Proportionale ſucht, und zu letzterer und der Strecke m die mittlere Proportionale conſtruirt. Die Linie y wird gefunden, wenn man zu den Strecken m, a, b die vierte Proportionale ſucht, und zu letzterer und der Strecke n die mittlere Proportionale conſtruirt.

525. Aufgabe. Zwei gerade Linien x, y zu conſtruiren, deren Summe $= s$ gegeben iſt, ſo daß eine andere gegebene Gerade a die mittlere Proportionale der beiden geſuchten Linien iſt.

Conſtruction. Wird die Hälfte der Strecke s um die Hälfte der mittleren Proportionale zwiſchen den Strecken $(s + 2a)$ und $(s - 2a)$ das eine Mal verlängert, das andere Mal verkürzt, ſo ergiebt ſich im erſten Falle die größere Linie x, im andern Falle die kleinere Linie y.

Digitized by Google

F; und verlängere AE und BF, bis ſie ſich in C ſchneiden: ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Anmerkung. Die drei Transverſalen AF, BE und CD eines Dreiecks ABC, die von den Ecken desſelben nach den Halbirungspunkten der Gegenſeiten gezogen werden, ſchneiden ſich in einem einzigen Punkte P, dem Schwerpunkte des Dreiecks ABC, und heißen daher auch Schwerpunkts-Transverſalen.

532. Aufgabe. Δ aus h_a, h_b, h_c.

Auflöſung. Da die Höhen im umgekehrten Verhältniß der zugehörigen Seiten ſtehen, ſo conſtruire man aus h_a, h_b und h_c ein Dreieck. Die Höhen desſelben verhalten ſich zu einander, wie die Seiten des geſuchten Dreiecks. Mithin läßt ſich aus dieſen Höhen, als Seiten, ein Dreieck conſtruiren, das dem geſuchten ähnlich iſt. Aus dem gefundenen Dreieck und den Höhen desſelben ergiebt ſich aber mittels der Höhen h_a, h_b, h_c ſofort das geſuchte Dreieck. (Verlängerung einer Höhe, bis ſie der homologen gegebenen Höhe gleich iſt ꝛc.)

Anmerkung. Die Höhen eines Dreiecks ſchneiden ſich in einem einzigen Punkte, der bei dem rechtwinkligen Dreieck im Scheitel des rechten Winkels, bei dem ſpitzwinkligen Dreieck innerhalb, bei dem ſtumpfwinkligen Dreieck außerhalb der Figur liegt. Verbindet man die Fußpunkte der Höhen durch gerade Linien, ſo ergiebt ſich ein Dreieck, deſſen Winkel durch die vorerwähnten Höhen halbirt werden. — Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks iſt der Mittelpunkt des umbeſchriebenen Kreiſes eines zweiten Dreiecks, deſſen Seiten durch die Eckpunkte des erſteren parallel den Gegenſeiten gelegt ſind.

---

15. Ähnlichkeit.

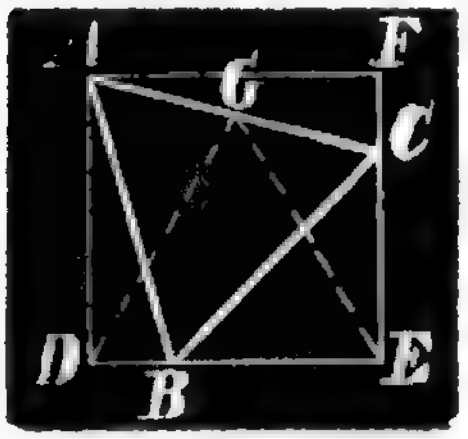
533. Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis ein gleichſchenkliges Dreieck zu conſtruiren, in welchem der an der Spitze liegende Winkel gleich der Hälfte des Baſiswinkels iſt.

Conſtruction. Man conſtruire an beliebiger Stelle aus $MD = r$ und $DE = \frac{r}{2}$, als Katheten, ein rechtwinkliges

Digitized by Google

A′D′E; errichte in letzterem die Höhen A′F und E′G; construire sodann aus B′C′ = E′G, als Basis, und AC′ = A′F, als Schenkel, ein zweites gleichschenkliges Δ AB′C′; fälle aus A ein Höhenperpendikel AH auf B′C′; verlängere AH über H bis D, so daß AHD = A′D′ = h_a wird; und lege durch D eine Parallele BC zu B′C′ bis an die verlängerten Seiten AB′ und AC′: so ist ABC das gesuchte Dreieck, in welchem die Höhe AD = h_a, die Höhe BE = h_b ist. (Vergl. Aufgabe 532.)

538. Aufgabe. In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so zu construiren, daß eine Ecke desselben auf einen Eckpunkt des Quadrats fällt, während die andern Ecken auf den Seiten des Quadrats liegen.



Construction. Man construire innerhalb des gegebenen Quadrats über einer Seite DE desselben, als Grundlinie, ein gleichseitiges Dreieck GDE; lege durch einen Eckpunkt A des Quadrats und den Punkt G eine Gerade AGC bis an die Gegenseite EF des Quadrats; schneide von C aus mit CB = AGC die Seite DE des Quadrats in B; und verbinde B mit A: so ist ABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Ein eben solches Dreieck entsteht, wenn man von F aus durch G bis an die Seite AD eine gerade Linie zieht und den auf der Seite DE liegenden Eckpunkt in der oben angedeuteten Weise bestimmt.

539. Aufgabe. Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels α gegebenen Punkt P eine Gerade XY so zu ziehen, daß die dadurch von den Schenkeln abgeschnittenen Stücke AX und AY in einem gegebenen Verhältniß m : n stehen.

Construction. Man trage von dem Scheitel A aus eine beliebige Maßeinheit auf dem einen Schenkel m mal, auf dem andern n mal ab; bezeichne die entsprechenden letzten Theilungspunkte mit B und C; ziehe BC; und lege durch P eine Parallele XPY zu BC bis zum Schnitt mit den Schenkeln des Winkels α, so ist

Digitized by Google

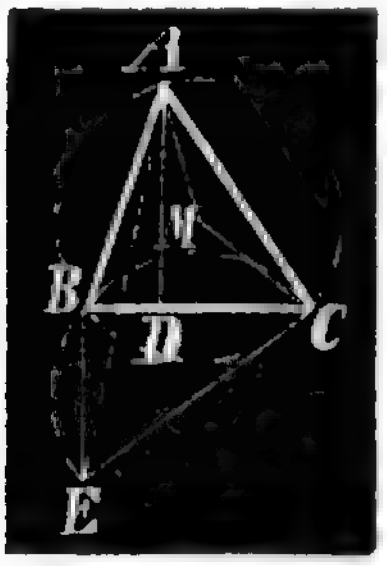
Construction. (Figur der 547. Aufg.) Man zeichne zwei Linien B′C′ und A′D, so daß B′C′ : A′D = (a : h_a) ist; construire über B′C′, als Sehne, einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel α als Peripheriewinkel faßt; ziehe unter einem senkrechten Abstande = A′D zu B′C′ eine Parallele EF, welche den erwähnten Kreisbogen in zwei Punkten schneidet (oder in einem Punkte berührt); verbinde einen derselben A′ mit B′ und C′; fälle von A′ aus ein Höhenperpendikel A′D auf B′C′; trage von C′ aus auf der unverlängerten oder verlängerten Seite A′C′ eine Strecke C′G = b ab; lege durch G eine Parallele GA zu B′C′ bis an die unverlängerte oder verlängerte Höhe A′D; ziehe aus A eine Parallele AB zu A′B′, und eine Parallele AC zu A′C′ bis an die unverlängerte oder verlängerte Seite B′C′: so ist ABC das gesuchte Dreieck.

555. Aufgabe. Von einem Dreieck ABC durch eine Parallele B′C′ zu einer Seite BC ein Dreieck AB′C′ von vorgeschriebenem Umfang = u abzuschneiden. (Fig. der 553. Aufg.)

Auflösung. Die Perimeter zweier ähnlichen Dreiecke verhalten sich wie ein Paar homologe Seiten. Wird daher der Umfang des gegebenen Dreiecks ABC mit s, die Seite BC mit a, die gesuchte Parallele B′C′ mit x bezeichnet, so ist

$$s : u = a : x,$$

woraus folgt, daß B′C′ = x die vierte Proportionale zu den drei Linien s, u und a ist. Man suche daher diese vierte Proportionale, trage auf BC, von einem Endpunkte B aus, eine Strecke BE gleich der Proportionale x ab; lege durch E eine Parallele EC′ zu BA bis zum Schnitt mit der Seite AC; und ziehe von C′ aus eine Parallele C′B′ zu CB bis zum Schnitt mit der Seite AB: so ist ABC das gesuchte Dreieck, dessen Umfang = u ist.



556. Aufgabe. Δ aus b, c, (a : h_a) = m : n.

Analysis. Es sei ABC das gesuchte Dreieck. Man errichte in C ein Loth CE auf AC, so wie in B ein Loth BE auf BC, bis sich beide Lothe in E schneiden; so ist Δ CBE ∽ Δ ADC, und daher:

Digitized by Google

Figure 1.1 Example of a figure.

Table 1.1 Example of a table.

Item	Value
A	1
B	2

563. Aufgabe. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

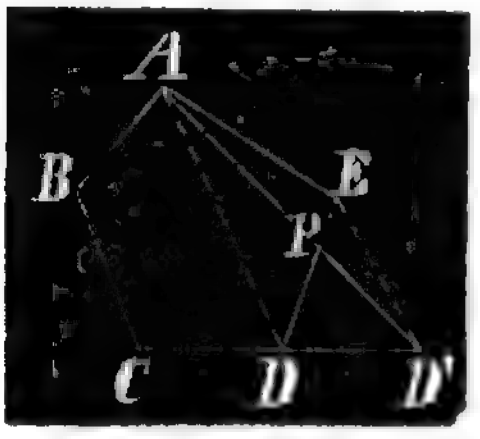
Auflösung. Bei derselben Höhe hat das gesuchte Dreieck das Zweifache der Grundlinie des Parallelogramms zur Grundlinie. Wird aber über der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms ein inhaltsgleiches Dreieck construirt, so ist die Höhe des letzteren das Zweifache der Höhe des ersteren.

564. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Construction. Bei gleicher Höhe beider Figuren hat das Parallelogramm die Hälfte der Grundlinie des Dreiecks zur Grundlinie. Bei gleicher Grundlinie der beiden Figuren ist die Höhe des gesuchten Parallelogramms halb so groß als die Höhe des gegebenen Dreiecks.

Anmerkung. Hiernach kann jedes Dreieck in ein Rechteck verwandelt werden.

565. Aufgabe. Ein Polygon in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.



Construction. Man schneide von dem gegebenen Polygon ABCDE durch eine Diagonale AD ein Dreieck ADE ab; lege durch den abgeschnittenen Eckpunkt E parallel zu AD eine Gerade ED bis zum Schnitt in D' mit der Verlängerung einer anstoßenden Seite CD; und verbinde D' mit dem andern Endpunkte A der Diagonale AD: so ist ABCD' = ABCDE.

Beweis 1.

$\Delta ADE = \Delta ADD'$
$\Delta ADP = \Delta ADP$, subtrahirt:
$\Delta AEP = \Delta DPD'$
$ABCDP = ABCDP$; addirt:
$ABCDE = ABCD'$.

Beweis 2.

$\Delta ADE = \Delta ADD'$
$ABCD = ABCD$, addirt:
$ABCDE = ABCD'$.

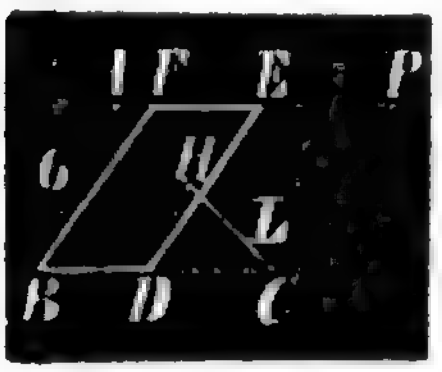
Anmerkung. Durch wiederholte Anwendung des angegebenen Verfahrens läßt sich jedes Polygon in ein Dreieck ver-

Loth GM; bis ſich beide Lothe in M ſchneiden; beſchreibe um M mit dem Radius MB einen durch die Endpunkte der Grundlinie BC gehenden Kreisbogen; lege durch die Spitze A des gegebenen Dreiecks ABC eine mit BC parallele Gerade, welche den erwähnten Kreisbogen in den Punkten A′ und A″ ſchneidet; und verbinde einen dieſer beiden Punkte A′ mit den Endpunkten B und C der Grundlinie BC: ſo ergiebt ſich das geſuchte Dreieck A′BC, in welchem der an der Spitze liegende Winkel BA′C = α iſt.

577. Aufgabe. Ein gleichſchenkliges Dreieck ABC in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt und gleichem Umfang zu verwandeln.

Conſtruction. Man halbire die Grundlinie BC des gegebenen Dreiecks in D; lege durch D eine Parallele DE zu der Seite BA, und durch A eine Parallele AE zu der Grundlinie BC; und verlängere die beiden erwähnten Parallelen bis ſie ſich in E ſchneiden: ſo hat das Parallelogramm ABDE mit dem gleichſchenkl. Dreieck ABC gleichen Inhalt und gleichen Umfang.

578. Aufgabe. Ein ungleichſeitiges Dreieck ABC in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt und gleichem Umfang zu verwandeln.



Conſtruction. Man halbire alle Seiten des gegebenen Dreiecks, nämlich AB in G, BC in D, AC in H; beſtimme auf AC die an $AH = \frac{AC}{2}$ anſtoßende Strecke HL $= AG = \frac{AB}{2}$, ſo daß $AH + HL = AL$ die halbe Summe der Dreiecksſeiten AB und AC iſt; lege durch die Spitze A eine Parallele AP zu BC; ſchneide von B aus mit $BF = AL$ die Parallele AP in F; und lege durch D parallel mit BF eine Gerade DE, von der die Parallele AP in E geſchnitten wird: ſo hat das Parallelogramm FBDE mit dem ungleichſeitigen Dreieck ABC gleichen Inhalt und gleichen Umfang.

579. Aufgabe. Ein Dreieck zu conſtruiren, welches einem gegebenen Dreieck inhaltsgleich und einem andern gegebenen Dreieck ähnlich iſt.

Digitized by Google

punkte G ein Loth GM, bis sich beide Lothe in M schneiden; beschreibe um M mit dem Radius MB einen durch die Punkte B und C gehenden Kreisbogen; lege durch die Spitze A des gegebenen Dreiecks parallel mit der Grundlinie BC eine Gerade, welche den erwähnten Kreisbogen in A' und A" schneidet; verbinde einen dieser Punkte A' mit B und C; beschreibe über A'C (der größeren Seite des Dreiecks A'BC), als Durchmesser, einen Halbkreis; trage auf A'C aus einem Endpunkte C eine Strecke CH = A'B ab; errichte auf A'C in H ein Loth HL bis zum Schnitt in L mit dem Halbkreise; verbinde C mit L; trage auf A'C von A' aus eine Strecke A'E = CL ab; verlängere A'B über B bis D, so daß A'BD = A'E wird; und verbinde zuletzt D mi E: so ist Δ A'DE gleichseitig und ebenso groß als das gegebene ungleichseitige Dreieck ABC.

Die angegebene Construction besteht also wesentlich in Nachstehendem:

a) Verwandlung des gegebenes Dreiecks ABC in ein Dreieck A'BC, in welchem der an der Spitze liegende Winkel BA'C $= \frac{2}{3}$ R ist. (Aufgabe 576.)

b) Verwandlung des Dreiecks A'BC in ein gleichschenkliges Dreieck A'DE, welches denselben Winkel an der Spitze hat. (Aufgabe 580.) Ist nämlich der an der Spitze liegende Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks $= \frac{2}{3}$ R, so so beträgt auch jeder der beiden Basiswinkel $\frac{2}{3}$ R, woraus erhellt, daß das Dreieck A'DE gleichseitig ist.

Anmerkung. Eine andere Lösung ist folgende. Man verwandle das gegebene Dreieck in ein gleichschenkliges; errichte über der Grundlinie ein gleichseitiges Dreieck; ziehe durch die Spitzen der beiden letzten Dreiecke eine bis zur Basis gehende Gerade; suche zu der Höhe des gleichschenkligen und des gleichseitigen Dreiecks die mittlere Proportionale; trage letztere auf der Höhe des gleichseitgen Dreiecks von dem Fußpunkte aus ab; und lege durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke Parallelen mit den in der Spitze des Dreiecks zusammentreffenden Seiten des gleichseitigen Dreiecks bis zum Schnitt mit der Grundlinie.

582. Aufgabe. Ein Trapez ABCD in ein inhaltsgleiches Parallelogramm ABC'D' zu verwandeln.

Construction. Man halbire eine der ungleichlaufenden

Digitized by Google

AB des einen, und einer Seite AC des andern gegebenen Rechtecks ein Dreieck ABC; conſtruire alsdann außerhalb desſelben über AB das gegebene Rechteck ABDE, über AC das andere gegebene Rechteck ACGF; verlängere die den Dreiecksſeiten AB und AC bezüglich gegenüberliegenden Seiten DE und GF der beiden Rechtecke, bis ſie ſich in P ſchneiden; lege durch P und A eine Gerade PAH bis zum Schnitt in H mit der Grundlinie BC = a; ziehe zu der Geraden PAH aus den Endpunkten der BC Parallelen BJ und CK, von denen die erſtere die Rechtecksſeite DE in J, die zweite hingegen die Rechtecksſeite FG in K ſchneidet; verbinde J und K durch eine gerade Linie; und fälle auf letztere aus den Endpunkten der BC die Lothe BL und CN: ſo iſt BCNL das geſuchte Rechteck.

Beweis. Nach der Conſtruction ſind BJ und CK parallel zu PH; mithin iſt BJ ∥ CK. Ferner iſt BJ = AP, wie auch CK = AP; daher BJ = CK. Demgemäß iſt BCKJ ein Parallelogramm. Da dasſelbe mit dem Rechteck BCNL gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, ſo iſt das Rechteck BCNL gleich dem Parallelogramm BCKJ

Wird ferner der Punkt, in welchem ſich die Linien PAH und JK ſchneiden, mit M bezeichnet, ſo iſt, weil Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe denſelben Flächeninhalt haben:

Rechteck ABDE = Parallelogramm ABJP
und Parallelogramm JBAP = Parallelogramm JBHM;
daher Rechteck ABDE = Parallelogramm JBHM.

Ebenſo ergiebt ſich:

Rechteck ACGF = Parallelogramm ACKP
und Parallelogramm CKPA = Parallelogramm CKMH;
daher Rechteck ACGF = Parallelogramm KCHM.

Alſo iſt ABDE + ACGF = BHMJ + HCKM = Parallelogramm BCKJ = Rechteck BCNL.

Anmerkung. Die Conſtruction eines Parallelogramms, welches gleich der Summe zweier gegebenen Parallelogramme iſt, beruht auf dem „Satz des Pappus.“ Die hierbei in Betracht kommenden Parallelogramme können in jedem einzelnen Falle verſchiedenartig ſein.

595. Aufgabe. Ein Parallelogramm BONL mit vorge-

Digitized by Google

und MC, ſo wie MG die mittlere Proportionale zu MD und ME; daher:

$$MA : MH = MH : MC,$$

d. i. $$r : MH = MH : \frac{3r}{2};$$

alſo I. $$MH = r\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Ferner iſt $$MD : MG = MG : ME,$$

d. i. $$\frac{3r}{5} : MG = MG : \frac{r}{2},$$

alſo II. $$MG = r\sqrt{\tfrac{3}{10}}.$$

Aus I. und II. ergiebt ſich: $MH + MG = HG = r\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{10}}\right)$,

mithin $(HG)^2 = r^2\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}\right) = r^2 . 3{,}14164078\ldots$,

ſo daß das Quadrat GHLN nur um $0{,}00004813 . r^2$, d. h. um weniger als $0{,}00005\, r^2$ größer iſt als der gegebene Kreis.

---

17. Theilung.

605. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien aus einem Eckpunkte in n gleiche Theile zu zerlegen.

Auflöſung. Man zerlege die Gegenſeite der gegebenen Ecke in n gleiche Theile, und verbinde die Theilungspunkte durch gerade Linien mit der erwähnten Ecke.

606. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck von einem Eckpunkte aus in n Theile zu zerlegen, die in einem gegebenen Verhältniß ſtehen.

Auflöſung. Man theile die Gegenſeite des gegebenen Eckpunktes in dem gegebenen Verhältniß, und verbinde die Theilpunkte mit dem erwähnten Eckpunkte.

607. Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in n gleiche Parallelogramme von derſelben Höhe zu zerlegeu.

Auflöſung. Man zerlege jede der beiden Grundlinien in n gleiche Theile, und verbinde die entſprechenden Theilpunkte, die einander gegenüberliegen, durch gerade Linien.

608. Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in n Parallelogramme von derſelben Höhe zu zerlegen, die in einem gegebenen Verhältniß ſtehen.

Auflöſung. Man theile jede der beiden Grundlinien in

Digitized by Google

Löſung. Da $BD = \frac{3}{5}(AB)$ iſt, ſo muß $BX = \frac{3.5}{8.3}$, d. i. $\frac{5}{8}$ der Linie BC ſein, d. h. es muß die Linie BC in X im Verhältniß $BX : XC = 5 : 3$ getheilt werden.

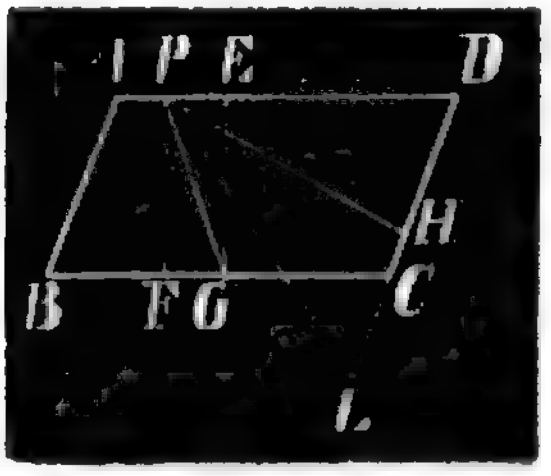
620. Aufgabe. In ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm einzubeſchreiben, das den halben Inhalt des erſteren hat.

Conſtruction. Man verbinde die Halbirungspunkte je zweier anſtoßenden Seiten durch gerade Linien, ſo ſchließen letztere das geſuchte Parallelogramm ein.

621. Aufgabe. Eine gegebene Kreisfläche durch einen concentriſchen Kreis zu halbiren.

Conſtruction. Man conſtruire über dem Radius der gegebenen Kreisfläche, als Hypotenuſe, ein rechtwinklig-gleichſchenkliges Dreieck, ſo iſt der Schenkel (die Kathete) des letzteren der Radius des um den gegebenen Mittelpunkt zu beſchreibenden Kreiſes.

622. Aufgabe. Ein Parallelogramm ABCD aus einem auf einer Seite gegebenen Punkte P in drei gleiche Theile zu zerlegen.



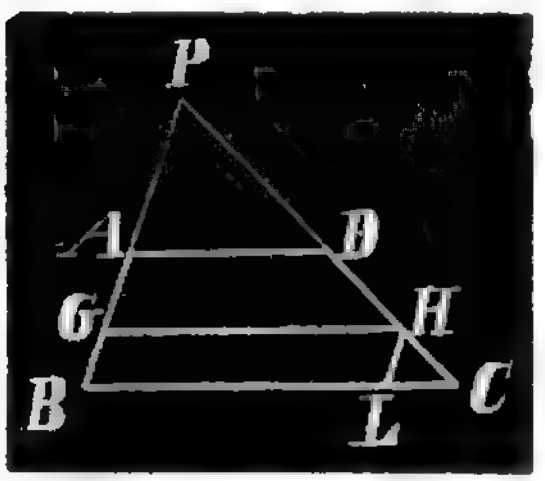
Conſtruction. Man zerlege jede der beiden Gegenſeiten AD und BC, von denen die eine AD den gegebenen Punkt P enthält, in drei gleiche Theile; verbinde die dem Punkte P benachbarten, einander gegenüberliegenden Theilpunkte E und F durch eine gerade Linie; ziehe PF; lege durch E eine Parallele EG mit PF bis zum Schnitt in G mit der Seite BC; und verbinde G mit P: ſo iſt $ABGP = \frac{1}{3}$ des Parallelogramms ABCD abgeſchnitten. Den Reſt, nämlich das Trapez $PGCD = \frac{2}{3}$ des Parallelogramms ABCD, verwandle man in ein Dreieck PDL, deſſen Grundlinie DL in die Seite DC, und deſſen Spitze P in den Eckpunkt P des genannten Trapezes fällt; halbire die Grundlinie DL in H; und verbinde H mit P: ſo iſt ΔPDH = Viereck PHCG = Trapez $PGBA = \frac{1}{3}$ des Parallelogr. ABCD.

Anmerkung. In ähnlicher Weiſe kann die Zerlegung in n gleiche Theile ausgeführt werden, wie auch die Theilung nach einem gegebenen Verhältniß.

Digitized by Google

Abſchnitte von einem Winkelpunkte des Dreiecks aus gerechnet, die mittlere Proportionale geſucht werden.

629. Aufgabe. Ein Trapez ABCD durch eine den beiden Grundlinien parallele Gerade zu halbiren.



Analyſis. Es ſei GH die geſuchte Halbirungslinie, mithin Trapez GHDA = Trapez GHCB = $\frac{1}{2}$ Trapez ABCD. Man verlängere die nichtparallelen Seiten AB und CD, bis ſie ſich in P ſchneiden; bezeichne BC mit a, AD mit b, und GH mit x; ſo iſt, weil die Dreiecke PBC, PGH und PAD ähnlich ſind:

$$\Delta PBC : \Delta PAD = a^2 : b^2,$$
$$\Delta PBC - \Delta PAD : \Delta PBC = a^2 - b^2 : a^2,$$
$$\text{d. i. I. Trapez ABCD} : \Delta PBC = a^2 - b^2 : a^2,$$

Ferner iſt

$$\Delta PBC : \Delta PGH = a^2 : x^2,$$
$$\Delta PBC : \Delta PBC - PGH = a^2 : a^2 - x^2,$$
$$\text{d. i. II. } \Delta PBC : \text{Trapez BCHG} = a^2 : a^2 - x^2.$$

Werden die Proportionen I. und II. mit einander multiplicirt, ſo ergiebt ſich nach gehöriger Kürzung:

$$\text{Trapez ABCD} : \text{Trapez BCHG} = a^2 - b^2 : a^2 - x^2,$$
$$\text{oder } 2 : 1 = a^2 - b^2 : a^2 - x^2;$$
$$\text{Daher iſt } a^2 - b^2 = 2a^2 - 2x^2,$$
$$\text{alſo } 2x^2 = a^2 + b^2,$$
$$\text{woraus erhellt: } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Conſtruction. Man conſtruire ein Quadrat, deſſen Inhalt $= (a^2 + b^2)$ iſt, und ſuche zu der Seite dieſes Quadrats und ihrer Hälfte die mittlere Proportionale; trage auf der Grundlinie BC des gegebenen Trapezes von B aus eine Strecke BL gleich der erwähnten mittleren Proportionale ab; lege durch L eine Parallele LH mit der Seite BA bis zum Schnitt in H mit der Gegenſeite CD; und ziehe von H parallel mit CB eine Gerade HG, von der die Seite AB in G geſchnitten wird: ſo iſt Trapez GHDA = Trapez GHCB = $\frac{1}{2}$ Trapez ABCD.

630. Aufgabe. Ein Dreieck ABC durch zwei Gerade, von

Digitized by Google

3. Das im Halbirungspunkte einer gegebenen Strecke a errichtete Perpendikel iſt Ort eines Punktes, welcher von den Endpunkten der Strecke a gleich weit entfernt iſt.

Beiſpiel. Gleichſchenkl. Dreieck aus Grundlinie und Höhe.

4. Das Perpendikel im Halbirungspunkte einer gegebenen Strecke a iſt Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe, welche die Strecke a zur Sehne haben.

Beiſpiel. Eine feſtliegende Strecke a zur Sehne eines Kreiſes von dem gegebenen Radius ϱ zu machen. (Zwei Kreiſe.)

5. Der Halbkreis iſt der Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, welche über dem Durchmeſſer, als Hypotenuſe, conſtruirt werden können.

Beiſpiele. Rechtwinkl. Δ aus a, h_a.
Rechtwinkl.-gleichſchenkl. Δ aus a (Hypotenuſe).
Δ aus a, h_b, h_c.

6. Der Kreisbogen, welcher den $\angle \alpha$ über der Sehne a faßt, iſt Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche über der Seite a, als Grundlinie, mit dem $\angle \alpha$ an der Spitze conſtruirt werden können.

Beiſpiele. Δ aus a, h_a, α.
Δ aus a, t_a, α.

7. Das Perpendikel in einem Punkte P einer Linie L iſt Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe, welche die Linie L in dem Punkte P berühren.

Beiſpiele. $\odot$ aus L, P in L, ϱ.
$\odot$ aus L, P in L, P'.

8. Die Halbirungslinie eines Winkels iſt Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe, von denen beide Schenkel berührt werden.

Beiſpiele. $\odot$ aus L, L', ϱ.
$\odot$ aus L, L', P in L.

9. Die beiden Parallelen zu einer Linie L in der Entfernung ϱ ſind Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe vom Radius ϱ, welche die Linie L berühren.

Beiſpiel. $\odot$ aus L, P, ϱ.

10. Der Ort für den Mittelpunkt einer Kreislinie, welche zwei gegebene parallele Linien L und L' berührt, iſt eine von L und L' gleichweit entfernte Parallele.

Digitized by Google

Beiſpiele. ⊙ aus $L \parallel L'$, P in L.
⊙ aus $L \parallel L'$, P zwiſchen L und L'.

11. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe, welche eine gegebene Kreislinie K in einem gegebenen Punkte P berühren, iſt die durch den Punkt P gehende Centrale.

Beiſpiele. ⊙ aus K, P auf K, ϱ.
⊙ aus K, P auf K, P'.

12. Der Ort für den Mittelpunkt jeder Kreislinie vom Radius ϱ, welche einen gegebenen Kreis K vom Radius r von außen berührt, iſt ein mit K concentriſcher Kreis vom Radius $(r + \varrho)$.

Beiſpiele. ⊙ aus K, P, ϱ.
⊙ aus K, L, ϱ.
⊙ aus K, K', ϱ.

13. Der Ort für den Mittelpunkt jeder Kreislinie vom Radius ϱ, welche einen gegebenen Kreis K vom Radius r von innen berührt, iſt ein mit K concentriſcher Kreis vom Radius $(r - \varrho)$ oder $(\varrho - r)$, je nachdem $r > \varrho$ oder $r < \varrho$ iſt.

Beiſpiele wie in Nr. **12.**

14. Der Ort für die Mittelpunkte aller Kreiſe, welche zwei gegebene concentriſche Kreiſe K und K' von den Radien r und r' berühren, wird durch die Peripherien zweier mit K und K' concentriſcher Kreiſe von den Radien $\frac{1}{2}(r + r')$ und $\frac{1}{2}(r - r')$ gebildet.

Beiſpiel. Einen Kreis zu conſtruiren, der zwei concentriſche Kreiſe K und K' berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht, welcher a) auf K; b) zwiſchen K und K' liegt.

15. Von zwei concentriſchen Kreislinien iſt die kleinere ein Ort für die Halbirungspunkte aller gleich großen Sehnen des größeren Kreiſes, welche den Radius des kleineren zum Centralabſtande haben.

Beiſpiele. Gegeben K und P. Durch P eine Secante zu legen, von der K eine Sehne gleich der gegebenen Länge s abſchneidet.

Gegeben K und L. In K eine Sehne $= s$ zu ziehen, welche mit L parallel iſt.

16. Iſt der Durchmeſſer des kleineren zweier ſich von innen berührender Kreiſe gleich dem Radius des größeren, ſo iſt die

Digitized by Google

Peripherie des kleineren ein Ort für die Halbirungspunkte aller Sehnen, welche durch den Berührungspunkt beider Kreislinien in dem größeren Kreiſe gezogen werden können.

Beiſpiele. Δ aus a, t_b, α.
Δ aus a, t_b, r.
Δ aus b, t_a, r.

Gegeben K und eine K durchſchneidende gerade Linie L. Durch einen in K gegebenen Punkt P eine Sehne zu legen, welche durch L halbirt wird.

17. Der Ort für die Halbirungspunkte aller Linien, von der gegebenen Länge a, welche zwiſchen die Schenkel eines rechten Winkels gelegt werden können, iſt ein mit dem Radius $\frac{a}{2}$ um den Scheitel beſchriebener Kreisquadrant.

18. Wenn zwei gleiche Kreiſe einander ſchneiden, ſo iſt der über der gemeinſchaftlichen Sehne, als Durchmeſſer, conſtruirte Kreis der Ort für die Halbirungspunkte aller Linien, welche durch die Endpunkte dieſer Sehne gezogen und von den gegebenen Kreislinien begränzt werden.

19. Jede durch den Schnittpunkt der Centrale und der gemeinſchaftlichen Sehne zweier ſich ſchneidender gleichen Kreiſe gezogene und entweder durch die beiden inneren oder durch die beiden äußeren Bogen begränzte Gerade wird in jenem Punkte halbirt. Die nach ihren Endpunkten gezogenen Radien ſind parallel.

20. Wird um ein Δ ABC der umbeſchriebene Kreis gelegt und um den Halbirungspunkt des Bogens BC ein durch die Punkte B und C gehender Kreisbogen beſchrieben, ſo iſt letzterer der geometriſche Ort für den Mittelpunkt des dem Dreieck einbeſchriebenen Kreiſes.

Beiſpiel. Rechtwinkliges Δ aus r, ϱ.

21. Der Halbkreis über der von zwei zugeordneten Punkten D und E begränzten Strecke DE, als Durchmeſſer, iſt Ort für jeden Punkt A, deſſen Entfernungen von den beiden andern zugeordneten Punkten B und C ein gegebenes Verhältniß haben. (Satz des Apollonius Pergaeus.)

Hypotheſis. Punkt A liegt auf dem über DE, als Durchmeſſer, errichteten Halbkreiſe.

Digitized by Google

d. h. ∠ BAC iſt durch die Linie AD halbirt, woraus folgt:

$$AB : AC = BD : CD.$$

Zuſatz. Auch der zugehörige Nebenwinkel CAL wird durch die Linie AE halbirt.

Bemerkung. Der angegebene geometriſche Ort findet Anwendung in denjenigen Dreiecksaufgaben, in denen eine Seite und das Verhältniß der beiden andern gegeben iſt. Es ſei z. B. in dem Dreieck ABC die Seite $BC = a$ und das Verhältniß der beiden andern Seiten $AB : AC = n : p$ gegeben, ſo wird Punkt D gefunden, wenn man BC in D derartig theilt, daß ſich ergiebt:

$$BD : DC = n : p.$$

Zu den drei auf einer Geraden liegenden Punkten B, D, C läßt ſich aber der vierte harmoniſche Punkt E finden.

Beiſpiele. Δ aus a, (b : c), h_a.

Δ aus a, (b : c), α.

Δ aus a, (b : c), t_a.

22. Soll ein Dreieck in ein anderes verwandelt werden mit Beibehaltung einer Seite (a), ſo iſt die durch die gegenüberliegende Ecke (A) zu dieſer Seite gezogene Parallele ein Ort für die Spitze des neuen Dreiecks.

Beiſpiele. Ein Dreieck in ein anderes mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln, das mit dem erſteren eine Seite gemein hat.

Ein Dreieck in ein gleichſchenkliges zu verwandeln, das mit erſterem eine Seite gemein hat.

23. Der in Nr. 22 mitgetheilte Ort iſt auch für die Verwandlung von Parallelogrammen brauchbar.

Beiſpiele. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Diagonale zu verwandeln, das mit erſterem die Grundlinie gemein hat.

Ein Parallelogramm mit Beibehaltung einer Diagonale in einen Rhombus zu verwandeln.

24. Beſchreibt man zwiſchen den Schenkeln eines Winkels einen Berührungskreis, ſo wird die Peripherie desſelben durch die Berührungspunkte in zwei Bogen getheilt, von denen der dem Scheitel zugekehrte ein Ort für alle Punkte iſt, deren Tan-

Digitized by Google

genten mit den beiden Schenkeln Dreiecke von einerlei Umfang bilden. (Vergl. Nr. 50.)

Beispiele. Δ aus $(a + b + c)$, α, h_a.
Δ aus $(a + b + c)$, α, m_a.

II. Data und Hülfsconstructionen.

25. Zur Summe zweier Größen und einer derselben ist die andere ein Datum.

Denn $(x + y) - x = y$.

Beispiel. Δ aus a, $(a + b)$, α.

26. Zur Differenz zweier Größen und einer derselben ist die andere ein Datum.

Denn $(x - y) + y = x$.
$x - (x - y) = y$.

Beispiel. Δ aus a, $(a - b)$, α.

27. Zwei Größen x und y sind bekannt, wenn ihre Summe $= s$ und gleichzeitig auch ihre Differenz $= d$ gegeben ist.
Denn $\frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y) = x = \frac{1}{2}(s + d)$.
$\frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) = y = \frac{1}{2}(s - d)$.

Beispiele. Δ aus $(a + c)$, $(a - c)$, h_b.
Δ aus a, α, $(\beta - \gamma)$.

28. Durch zwei gegebene Winkel ist ein Dreieck der Form nach bestimmt.

Beispiele. Δ aus α, β, t_a.
Δ aus α, β, $(a + b + c)$.
Δ aus b, β, $\angle(ct_a)$.

29. Durch einen Winkel und das Verhältniß der ihn einschließenden Seiten ist ein Dreieck der Form nach bestimmt.

Beispiele. Δ aus $(a : c)$, b, β.
Δ aus $(b : c)$, h_a, α.

30. Durch das Verhältniß zweier Seiten $(b : c)$ und den der *größeren* (b) dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel (β) ist ein Dreieck der Form nach bestimmt.

Beispiele. Δ aus a, $(b : c)$, β.
Δ aus $(b : c)$, ϱ, β.

31. Ist das Verhältniß zweier Seiten $(b : c)$ eines Dreiecks

Digitized by Google

und der der kleineren (c) dieſer Seiten gegenüberliegende Winkel (γ) gegeben, ſo ſind gewöhnlich zwei verſchiedene Reſultate möglich, indem zwei Dreiecke von verſchiedener Form entſtehen können.

Beiſpiele. Δ aus a, (b : c), γ.
Δ aus (b : c), ϱ, γ.

32. Durch das Verhältniß aller drei Seiten iſt ein Dreieck der Form nach beſtimmt.

Beiſpiele. Δ aus (a : b : c), ϱ.
Δ aus (a : b : c), r.

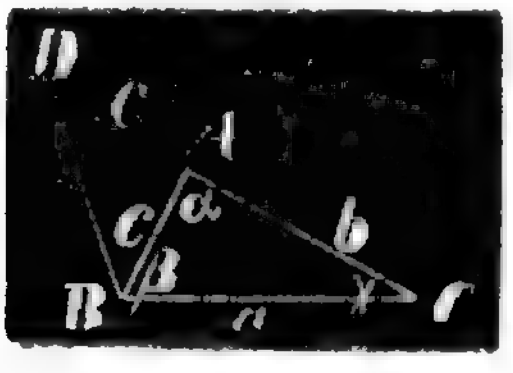
33. In jedem Dreieck ſtehen eine Seite (a), ein anliegender Winkel (β) und die Höhe (h_a) aus dem andern anliegenden Winkel (γ) im Verhältniß der Data. Es beſtimmen nämlich je zwei der Stücke a, h_a und β ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem das dritte dieſer Stücke liegt. Aus dem Verhältniß $a : h_a$ ergiebt ſich daher $\angle\beta$; und umgekehrt iſt $\angle\beta$ gegeben, ſo kennt man auch das Verhältniß der Seite a zur Höhe h_a.

Beiſpiele. Δ aus a, h_a, t_a.
Δ aus α, h_a, m_a.

34. Iſt zur Conſtruction eines Dreiecks eine Seite a und die Summe der beiden andern (b + c) gegeben, ſo iſt es ſehr zweckdienlich, die Seite b um c, oder die Seite c um b über ihren Schnittpunkt hinaus zu verlängern und den Endpunkt D der Verlängerung mit der dritten Ecke B, reſp. C des Dreiecks zu verbinden. Hierdurch entſteht ein Hülfsdreieck, beſtehend aus dem geſuchten und einem gleichſchenkligen Dreieck.

Beiſpiele. Δ aus a, (b + c), α.
Δ aus a, (b + c), γ.
Δ aus a, (b + c), β.

35. In dem vorerwähnten Hülfsdreieck (BCD) iſt der Winkel, welcher der Summe der Seiten (b + c) gegenüberliegt, ein Datum von $(\beta - \gamma)$.



Wird die größere Seite AC = b um die kleinere AB = c über A hinaus verlängert und der freie Endpunkt D der Verlängerung AD = c mit B verbunden, ſo iſt im gleichſchenkligen Dreieck ABD

Digitized by Google

des umbeſchriebenen Kreiſes auf die (zur erwähnten Höhe gehörige) Grundlinie.

Denn verbindet man die Halbirungspunkte D und F zweier Seiten (BC und AC) unter ſich und mit M, ſo iſt

$$\Delta ABH \sim \Delta DFM,$$

und daher $AH : DM = AB : FD = 2 : 1$;

alſo I. $AH = 2.DM$.

Wird ferner der Schwerpunkt des Dreiecks mit S bezeichnet und derſelbe mit den Punkten M und H durch gerade Linien verbunden, ſo iſt

HSM eine gerade Linie

und $HS = 2.SM$,

d. h.: In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt der Höhen H, der Schwerpunkt S, und der Mittelpunkt des umbeſchriebenen Kreiſes M in gerader Linie, und theilt der Schwerpunkt die von den beiden andern Punkten begränzte Strecke im Verhältniß von 2 : 1. (Satz des Euler.)

Denn $AH : MD = 2 : 1$ (I.),

$AS : SD = 2 : 1$ (Nr. 43),

$\angle HAS = \angle MDS$,

woraus folgt $\Delta HSA \sim \Delta MSD$,

daher $\angle HSA = \angle MSD$;

und weil AS mit SD eine gerade Linie bildet, ſo liegt auch das andere Paar der Schenkel der beiden zuletzt genannten Winkel in einer geraden Linie, d. h.

HSM iſt eine gerade Linie

und $HS : SM = 2 : 1$.

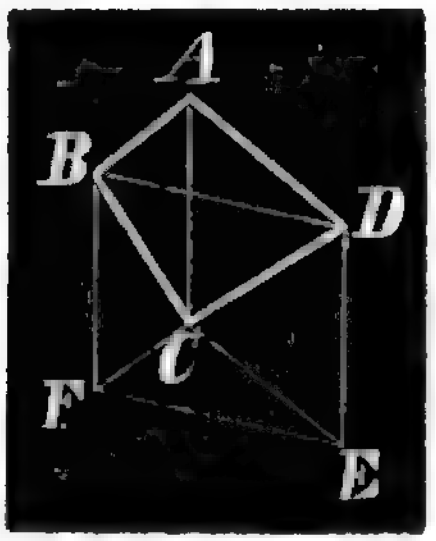
Beiſpiele. Δ aus S, H und einem Eckpunkte.

Δ aus M, H und einem Eckpunkte.

Δ aus H, Eckpunkt A und m_a.

48. Verbindet man (Figur zu Nr. 39) den Mittelpunkt M des um ein Dreieck ABC beſchriebenen Kreiſes mit zwei Eckpunkten B und C, ſo entſteht ein gleichſchenkliges Dreieck MBC, in welchem der Winkel an der Spitze BMC doppelt ſo groß iſt als der der Baſis BC gegenüberliegende Winkel BAC des gegebenen Dreiecks ABC, d. h.: In einem gleichſchenkligen Dreieck, deſſen Grundlinie $= a$ und deſſen Schenkel $= r$ ſind, iſt der an der Spitze liegende Winkel $= 2\alpha$. Hieraus folgt:

Digitized by Google



doppelt ſo groß iſt als das Trapezoid ABCD.

(Zum Beweiſe dienen die Hülfslinien CE und CF.) Man benutzt beſonders das genannte Parallelogramm, wenn im Trapezoid ABCD der ſpitze Winkel (ee′), den die Diagonalen an ihrem Schnittpunkte bilden, gegeben iſt.

Beiſpiel. Viereck aus a, c, e, e′, Winkel (ee′).

56. Wird in einem Viereck eine Diagonale gezogen, dieſelbe in n gleiche Theile zerlegt und jeder Theilpunkt mit beiden gegenüberliegenden Ecken verbunden, ſo zerfällt das Viereck (ohne die erwähnte Diagonale) in n gleiche Theile.

57. Um ein Trapez in n gleich große Trapeze zu zerlegen, hat man jede der parallelen Seiten in n gleiche Theile zu theilen und die gegenüberliegenden Theilpunkte durch gerade Linien zu verbinden.

58. Um ein Trapez in n gleiche Theile zu zerlegen, theile man die Mittellinie in n gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte beliebige, ſich nicht innerhalb des Trapezes ſchneidende gerade Linien zwiſchen den parallelen Seiten.

Beiſpiele. Ein Trapez aus dem Schnittpunkte der nichtparallelen Seiten in n gleiche Theile Theile zu zerlegen.

Ein Trapez vom Eckpunkte A aus durch gerade Linien in n gleiche Theile zu zerlegen.

59. Eine Figur, welche von einem gegebenen Punkte P aus getheilt werden ſoll, pflegt man zuvor in ein Dreieck zu verwandeln, deſſen Spitze im Punkte P liegt. Wird die verlangte Theilung an dieſem Dreieck vorgenommen, ſo ergeben ſich in den meiſten Fällen Flächenſtücke, die nicht innerhalb der gegebenen Figur liegen und daher in dieſelbe hineingeſchafft werden müſſen. Hierzu bedient man ſich des nachſtehend mitgetheilten Verfahrens.

* Es ſei das Viereck ABCD von A aus durch eine gerade Linie zu halbiren. Man ziehe von D aus parallel mit der Diagonale AC eine Gerade DZ bis zum Schnittpunkt Z mit der verlängerten BY, und verbinde Z mit A, ſo iſt Δ ABZ = Viereck ABCD. Wird nun BZ in Y halbirt, und Y mit

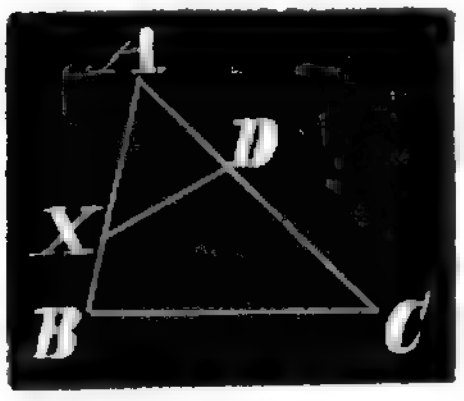
Digitized by Google

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

Ein Trapez durch Linien, welchen den parallelen Seiten parallel sind, in n gleiche Theile oder nach einem gegebenen Verhältniß zu zerlegen.

Ein Viereck durch Linien, welche mit einer Diagonale parallel sind, in n gleiche Theile oder nach einem gegebenen Verhältniß zu zerlegen.

62. Eine andere Anwendung des vorstehend mitgetheilten Satzes findet statt, wenn an den Spitzen eines Dreiecks oder eines Parallelogramms Dreiecke von vorgeschriebenem Inhalt abgeschnitten werden sollen.



Es sei im Δ ABC auf der Seite AC der Punkt D derartig gegeben, daß AD $= \frac{m}{n}$ von AC ist. Von D aus eine Theilungslinie (DX) zu legen, daß das abgeschnittene Dreieck (ADX) $= \frac{p}{q}$ des Dreiecks ABC ist, oder daß sich verhält Δ ADX : Δ ABC = p : q.

Man hat wegen des gemeinsamen Winkels A:

$$\Delta \text{ AXD} : \Delta \text{ ABC} = \text{AX}\cdot\text{AD} : \text{AB}\cdot\text{AC}$$

und auf Grund des gegebenen Verhältnisses:

$$\Delta \text{ AXD} : \Delta \text{ ABC} = \text{p} : \text{q}.$$

Aus diesen beiden Proportionen ergiebt sich:

$$\text{AX}\cdot\text{AD} : \text{AB}\cdot\text{AC} = \text{p} : \text{q},$$

oder $$\text{AX}\cdot\frac{\text{m}}{\text{n}}\cdot\text{AC} : \text{AB}\cdot\text{AC} = \text{p} : \text{q},$$

auch $$\text{AX}\cdot\frac{\text{m}}{\text{n}} : \text{AB} = \text{p} : \text{q},$$

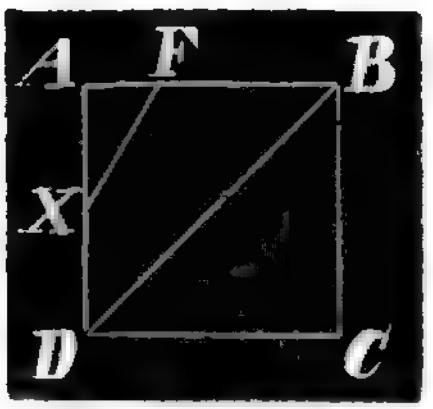
also $$\text{AX}\cdot\frac{\text{m}}{\text{n}}\cdot\text{q} = \text{p}\cdot\text{AB};$$

mithin $$\text{AX} = \frac{\text{np}}{\text{mq}}\cdot\text{AB}.$$

Soll in der angegebenen Weise irgend eine Ecke eines Parallelogramms abgeschnitten werden, so benutze man die dieser Ecke gegenüberliegende Diagonale.

Es sei im Parallelogramm ABCD auf der Seite AB ein

Digitized by Google



Punkt F ſo gegeben, daß $AF = \frac{m}{n} \cdot AB$ iſt. Von F bis an die Seite AD eine Theilungslinie (FX) ſo zu legen, daß das abgeſchnittene Dreieck AFX zu dem Parallelogramm ABCD im Verhältniß von $p : q$ ſteht.

Man ziehe die Diagonale BD, ſo iſt

$$\Delta\, AFX = \frac{p}{2q} \cdot \Delta\, ABD$$

und daher obigem Verfahren gemäß

$$AX = \frac{np}{2mq} \cdot AD.$$

Beiſpiele. Ein gleichſeitiges Dreieck derartig abzuſtumpfen, daß der Überreſt ein reguläres Sechseck iſt, deſſen Inhalt zu dem des gleichſeitigen Dreiecks im Verhältniß von 2 : 3 ſteht.

In ein gegebenes Quadrat ein anderes einzubeſchreiben, das ſich dem Inhalte nach zu dem erſteren wie 5 : 9 verhält, oder aber wie 2 : 3.

Von einem Rechteck vier congruente rechtwinklige Dreiecke derartig abzuſchneiden, daß ein Sechseck übrigbleibt, welches dem Inhalte nach gleich $\frac{3}{4}$ des Rechtecks iſt. Es fragt ſich, in welche Abſchnitte die beiden Grundlinien des Rechtecks getheilt werden müſſen, wenn die Theilungslinien von den Halbirungspunkten der Höhenſeitenausgehen.

Berichtigung.

Auf Seite **96** in Aufg. **165** iſt zu ſetzen:

Zeile **9**: $\angle ACE = R - \frac{1}{4} A$ ſtatt $\angle ACE = \frac{1}{4} A$
$\angle CED = R + \frac{1}{4} A$ ſtatt $\angle CED = \frac{5}{4} A$
Zeile **13**: $\angle DEC = R + \frac{1}{4} A$ ſtatt $\angle DEC = \frac{3}{4} A$.

Digitized by Google

Inhalt.

Einleitung.

Seite.

I. Von der geometrischen Aufgabe . . . . . 7.
II. Von der analytischen Methode . . . . . 10.
III. Aufgaben mit vollständiger Lösung . . . . . 13.
IV. Bezeichnungen . . . . . 21.

Abschnitt I.

Congruenz der geradlinien Figuren.

1. Winkel, Linien und Punkte (Aufg. 1 — 21) . . . . . 25.
2. Construction des rechtwinkligen Dreiecks (Aufg. 22 — 36). . . 33.
3. Construction des gleichschenkligen Dreiecks (Aufg. 37 — 63) . . 40.
4. Construction der Dreiecke (Aufg. 64 — 129) . . . . . 49.
5. Construction der Parallelogramme.
   a) Das Quadrat (Aufg. 130 — 132). . . . . 82.
   b) Das Rechteck (Aufg. 133 — 150) . . . . . 84.
   c) Der Rhombus (Aufg. 151 — 165) . . . . . 92.
   d) Parallelogramme im Allgemeinen (Aufg. 166 — 180) . . 96.
6. Construction der Trapeze.
   a) Das gleichschenklige Trapez (Aufg. 181 — 192) . . . . 99.
   b) Das Trapez (Aufg. 193 — 261) . . . . . 103.
7. Construction der Vierecke.
   a) Das Deltoid (Aufg. 262 — 278) . . . . . 117.
   b) Die Vierecke (Aufg. 279 — 320) . . . . . 121.
8. Die Polygone (Aufg. 321 — 327) . . . . . 134.

Abschnitt II.

Kreise, nebst den in und um den Kreis beschriebenen Figuren.

9. Geometrische Örter (Aufg. 328 — 337). . . . . 138.
10. Kreise, Sehnen, Tangenten und Secanten (Aufg. 338 — 395) . 140.
11. Kreis und Dreieck (Aufg. 396 — 420) . . . . . 175.

Digitized by Google

12. Kreis und Viereck. Seite.
a) Sehnenvierecke (Aufg. 421 — 458) . . . . . 186.
b) Tangentenvierecke (Aufg. 459 — 481) 198
c) Sehnen-Tangentenvierecke (Aufg. 482 — 487) . . . . 205.
13. Die regulären Polygone (Aufg. 488 — 506) . . . . . 208.

Abschnitt III.

Proportionalität und Ähnlichkeit.

14. Proportionalität (Aufg. 507 — 532) . . . . . 217.
15. Ähnlichkeit (Aufg. 533 — 560) . . . . . 230.

Abschnitt IV.

Inhaltsgleichheit.

16. Verwandlung.
a) Geradlinige Figuren (Aufg. 561 — 595) . . . . . 242.
b) Krummlinige Figuren (Aufg. 596 — 604) . . . . . 257.
17. Theilung (Aufg. 605 — 636) . . . . . 262.

Anhang.

18. Hülfsmittel zur Lösung geometrischer Aufgaben . . . . . 276.

Krämer'sche Buchdruckerei (E. R. Brandt) in Potsdam.

Digitized by Google

Von demselben Verfasser ist erschienen:

a. **In demselben Verlage:**

Fünf Hefte Aufgaben zum schriftlichen Rechnen. I—IV. à 0,5 Mark = 5 Sgr., V. à 0,8 Mark = 8 Sgr.

Auflösungen zu diesen Aufgaben, vollständig in drei Heften. à 0,8 Mark = 8 Sgr.

Anweisung zum Unterricht im Rechnen. 3,5 Mark = 1 Thlr. 5 Sgr.

Neue Methode für den Rechenunterricht in der Elementarschule des Deutschen Reiches. 1,2 Mark = 12 Sgr. (Nach den Intentionen der Königlichen Regierung zu Potsdam bearbeitet und von mehreren Königlichen Regierungen empfohlen.)

Die Decimalbrüche, Anweisung und Aufgaben, zusammen 1 Mark = 10 Sgr.

Hundert Rechenaufgaben aus dem Gebiete der Landwirthschaft und Haushaltung. (Auf Grund des neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystems bearbeitet.)

A. **Ausgabe für den Lehrer,** mit vollständigen Berechnungen. 0,4 Mark = 4 Sgr.

B. **Ausgabe für den Schüler.** 0,15 Mark = 1½ Sgr.

Aufgaben zum Kopfrechnen. 1,8 Mark = 18 Sgr.

b. **Bei A. Stubenrauch in Berlin, Hallesches Ufer 21.**

Ebene und körperliche Geometrie für Seminarien und gehobene Stadtschulen. 3 Mark = 1 Thlr.

Elementarer Schulbedarf aus dem Gebiete der Planimetrie und Stereometrie für Elementarschulen und Präparandenanstalten. 1 Mark = 10 Sgr.

c. **Bei F. A. Brockhaus in Leipzig:**

Geometrische Rechenaufgaben. 1,5 Mark = 15 Sgr.

Facitbüchlein dazu. 0,4 Mark = 4 Sgr.

d. **Bei H. Beyer in Langensalza:**

Lehr- und Handbuch der Flächen- und Körperrechnung. Dritte, auf Grund des neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystems bearbeitete und mit 610 Uebungsaufgaben vermehrte Auflage. 1 Mark = 10 Sgr.

Im Verlage von **Aug. Stein** in **Potsdam** ist ferner erschienen:

Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten von Dr. Th. Spieker, Oberlehrer an der Realschule zu Potsdam. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Siebente verbesserte Auflage. 1873. 20 Bg. 8. 25 Sgr.

Leitfaden für den ersten arithmetischen Unterricht in mittleren Gymnasialklassen von Dr. W. Schlesicke, Subrector. 8 Bg. 8. geb. 12½ Sgr.

Pflanzenkunde. Zum Gebrauch beim Selbstunterricht in Schulen und auf Excursionen; für Lehrer, Seminaristen und Präparanden, mit vielen in den Text gedruckten Abbildungen bearbeitet von F. G. Hübner, Seminarlehrer in Cöpenick. 2te verbesserte und sehr vermehrte Auflage. 26½ Bogen gr. 8. br. 1½ Thlr.

Digitized by Google

Digitized by Google

Princeton University Library
32101 076800489

Digitized by Google

Digitized by Google